

共形变换, 变换光学与相位梯度超构表面

——原理, 模拟及讨论

姜泽坤 19307110256
吕盎然 19307110459

摘要: 通过设计和制造具有介电电磁性质的材料, 进而实现对电磁波的调控, 是超材料领域的研究目标之一. 共形变换 (Comformal Mapping, CM) 和变换光学 (Transformation Optics, TO) 为超材料性质的理论设计提供了普适的方法和原则. 使用各向异性介质反射与透射所设计的梯度超构表面 (Gradient-index Metasurfaces), 能够基于广义 Snell 定律改变电磁波的传播方向. 本文对共形变换和变换光学的理论进行了介绍, 基于两道题目讨论了两者在电磁学中的实际运用, 并讨论了两种方法引用与超材料设计的操作流程. 随后讨论了梯度超构表面的理论与实际实现. 然后使用COMSOL对两种方法设计的柱状隐身衣进行模拟并对比, 发现共形变换设计隐身衣因阻抗不匹配与局域化的原因产生了显著的能量散射. 最后基于梯度超构表面, 对共形变换所设计隐身衣进行改进, 结果显示能流散射显著减少.

关键词: 共形变换, 变换光学, 梯度超构表面, 隐身衣, 阻抗

目录

1	引言	3
2	共形变换	4
2.1	数学基础	4
2.2	求解静电磁场	4
2.3	一道题目: 平行圆柱极板	4
2.4	共形变换构建超材料	8
3	变换光学	9
3.1	数学基础	9
3.2	一道题目: Touching Spheres	12
3.3	变换光学构建超材料	14
4	相位调制超构表面	14
4.1	原理简述	14
4.2	数学推导	15
4.3	物理实现	17
4.4	COMSOL 模拟相位梯度表面	17

5	隐身衣的电磁波控制原理及模拟	18
5.1	隐身衣的变换光学实现	18
5.2	隐身衣的共形变换实现	19
5.3	COMSOL 模拟	19
6	通过相位调制表面改进隐身衣	22
6.1	应用相位调制改善 CM 隐身衣效果	22
6.1.1	顶部对齐	23
6.1.2	中部 (腰部) 对齐	24
6.2	结果讨论	25
7	总结	26

1 引言

共形变换 (Conformal Mapping, 后文称 CM) 和变换光学 (Transformation Optics, 后文称 TO) 在超材料设计中具有普适指导意义. 共形变换^[1]基于 Helmholtz 方程, 通过调节结构折射率, 实现在二维平面内对 TE 波 (Transverse Electric Wave) 传播路径的控制. 变换光学^[2]通过建立两实空间的映射, 设计两空间电磁介质属性 (介电常数, 磁导率) 的关系来保持两空间中 Maxwell 方程形式不变, 从而实现对电磁场分布的调控. 理想的各向异性介质层堆叠有复数反射率与透射率, 通过设计与之电磁介质属性相符的超构表面^[3], 可以实现对反射与透射电磁波的散射率和相位控制.

设计电磁波隐身衣是超材料领域最吸引人的实践之一, 我们可以在 CM 和 TO 的指导下设计出性能不同的隐身衣, 也可以通过其他方式设计, 如相位梯度表面组合零折射率材料^[4], 利用多粒子系等离子共振耦合降低散射率^[5], 或利用抗磁-铁磁复合表面实现磁隐身^[6].

虽然前人已经开发了许多用于研究电磁体系的理论方法, 但是有时体系过于复杂 (如位形设置难以理论处理, 参数关联过多等) 难以进行有效的理论求解, 或因实验上的种种限制难以对已有理论的正确性进行检验. 相应的在计算物理中, 有限元方法 (Finite Element Method^[7], 后文称 FEM) 与时域有限差分方法 (Finite Difference Time Domain^[8], 后文称 FDTD) 常用于数值求解复杂电磁体系问题, 并能得到较高准确度的结果.

本文首先分别阐述了 CM 和 TO 的理论推导, 并两者应用于求解电磁场体系 (平行圆柱极板^[9], Touching Spheres^[10]), 辅以 COMSOL 进行模拟以验证理论正确性. 然后阐述了各向异性介质层调控电磁波相位的原理和相应的物理实物实现^[11], 并使用 COMSOL 对文献^[3]中相关结果进行复现. 之后基于 CM 和 TO 推导了两种方法的隐身衣设计^[12], 并进行了详细的 COMSOL 模拟, 对比了两者的实际隐身效果, 发现 CM 所设计隐身衣因阻抗不匹配和有限大的原因存在明显的能流散射. 对此, 我们基于前述相位梯度表面, 在 Mathematica 辅助下从理论角度设计了 CM 隐身衣的相位梯度表面, 并在 COMSOL 中建模验证, 结果显示加入相位梯度表面后, 能流散射显著减少, 隐身效果得到提升.

本文中提到的补充材料, 请见补充材料文件夹.

2 共形变换

共形变换 (Conformal Transformation, CM) 或称保角变换, 即映射前后空间中的两条曲线在交点处的夹角不变^[9].

本章节将会简述 CM 相关的数学操作, 然后介绍利用 CM 求解静电场, 并对“平行圆柱极板”的情形进行求解, 最后介绍 CM 用于设计控制电磁波的特殊介质的操作流程.

2.1 数学基础

如果将二维平面 (x, y) 对应到复平面 $z = x + iy$, 并用解析函数 $w = f(z)$ 进行映射 $z \rightarrow w$, 则映射前 z 平面上两交线在交点处的夹角, 与在 w 平面上交点处夹角相同.

在 z 平面上给定一点, w 平面必有一点 $w = w(z)$ 跟它相对应. 这样, 在 z 平面上每给定一根曲线, w 平面必有一根对应的曲线. 在相应的两曲线上各截取相应的一小段 $(z, z + \Delta z)$, $(w, w + \Delta w)$, 则有

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} e^{i(\arg \Delta w - \arg \Delta z)} \quad (2.1.1)$$

由此可见, 解析函数的导数的几何意义为: 它的模代表的是, 经过该变换之后, 无穷小线段元 dz 变为 w 平面无穷小线段 dw 的长度伸缩比; 幅角代表的是 dw 相对于 dz 逆时针方向转过的角度.

由于 dw/dz 的值与 $\Delta z \rightarrow 0$ 的方式无关, 因此, 如果在 z 平面上有两根曲线相交于点 z , 那么在 w 平面上也有相应的两根曲线相交于相应的点 w . 在映射前后, 两条曲线都逆时针旋转 $\arg w'(z)$, 所以两条曲线交角不变. 因此解析函数 $w = w(z)$ 所代表的变换被称为保角变换.

2.2 求解静电磁场

Poisson 方程(2.2.1)在保角变换后形式不变^[9], 变换后形式为(2.2.2).

$$\nabla_{xy}^2 u = f(x, y) \quad (2.2.1)$$

$$\nabla_{\xi\eta}^2 u = \frac{1}{\left|\frac{dw}{dz}\right|^2} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \hat{f}(\xi, \eta) \quad (2.2.2)$$

由于 Poisson 方程在保角变换前后形式不变, 因此可以用于求解静电/磁场方程. 其基本思路为: 通过共形变换, 能够将原本难以求解的位形情况, 转化为易于求解的位形情况. 在此情况下求解标量势, 并变换回原先空间中.

2.3 一道题目: 平行圆柱极板

本节对于一个简单的例子使用 CM 求解电场分布, 并比较 CM 理论计算和COMSOL的模拟结果. 本部分理论计算见附件平行圆柱极板_理论计算和绘图.nb.

考虑二维情况 (三维沿 z 轴平移对称), 两个平行圆柱半径分别为 R_1 和 R_2 , 柱轴相距 $L(> R_1 + R_2)$. 当向两个圆柱施加大小相等, 符号相反的电压时, 求解圆柱外的空间分布.

通过查阅资料可以得知, 利用分式线性变换 (性质: 圆变换成圆, 对称点依然为对称点), 可以将两圆柱变换成同轴圆柱. 具体操作为如下: 利用方程组2.3.1, 寻找对称点 $\{x_1, x_2\}$ 并做分式变换2.3.2, 将 x_1 变换到原点, 将 x_2 变换到无穷远处, 形成两个同轴圆柱.

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= R_1^2 \\ (L - x_1)(L - x_2) &= R_2^2 \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

$$w(z) = \frac{z - x_1}{z - x_2} \quad (2.3.2)$$

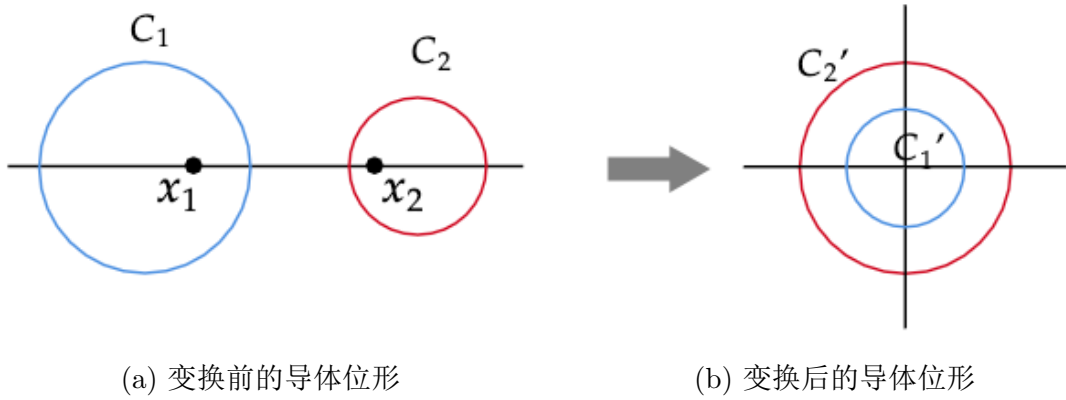


图 1 变换前(a)与变换后(b)的导体位形的变换情况, 颜色相同的圆柱为变换前后对照的圆柱.

变换前圆柱之外的区域被变换到同轴圆柱中间, 而后者区域的电场是容易求解的. 因为 Poisson 方程在变换前后的形式保持不变(2.2.2), 故变换前后对应空间的电势相等.

使用Mathematica绘制变换前后的导体的空间位形分布 (理论上) 如下二图, 图中网格颜色一一对应, 表明了空间之间的映射.

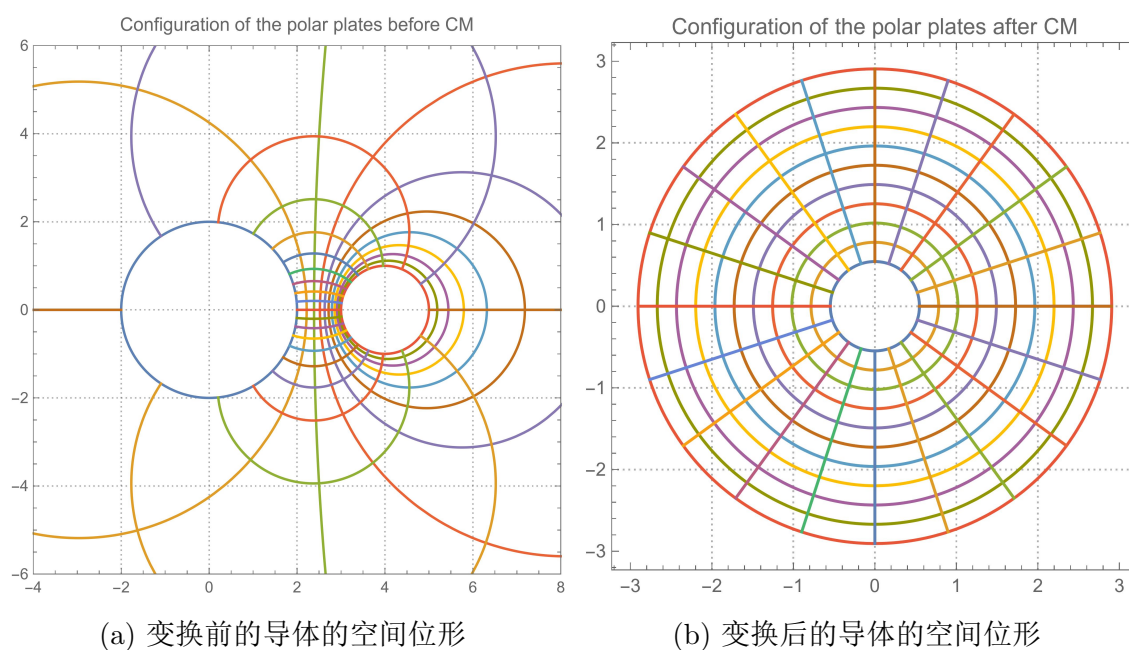


图 2 变换前(a)与变换后(b)的导体位形及空间区域的变换情况, 颜色相同的线条为变换前后对照的线条.

使用COMSOL模拟两个平行轴圆柱在空间中产生的电场与电势. 对比较小区域中的结果 (整个模拟区域的中心部分), 我们发现电场线形状和电势符合得非常好.

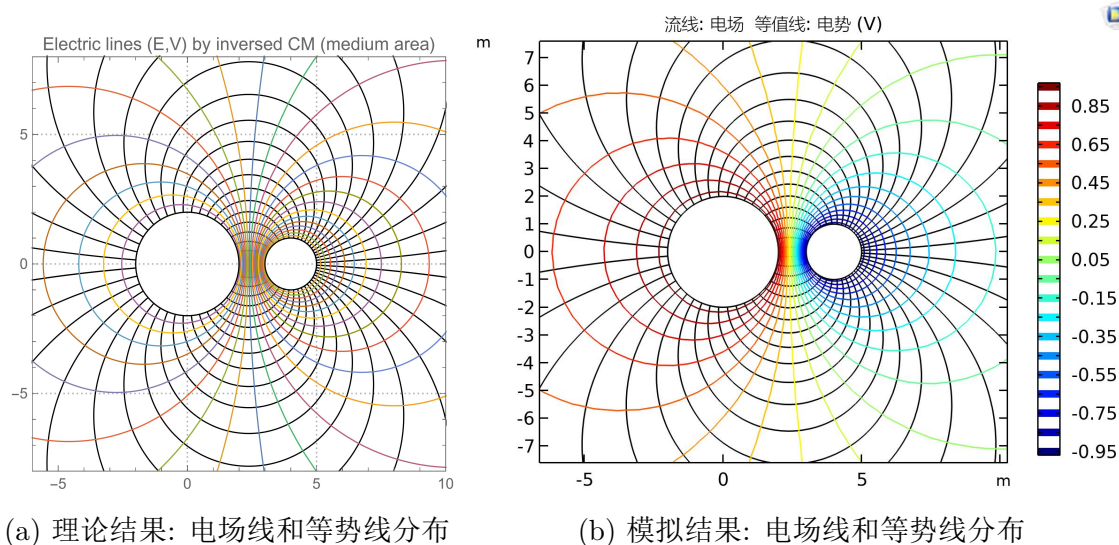


图 3 中心区域内, 电场线和等势线分布的理论结果(a)与模拟结果(b)对照, 等势线均为电势数值的等分绘图.

接下来在较大范围内对照根据共形变换理论计算出的结果与COMSOL模拟的平行轴圆柱外的场强分布.

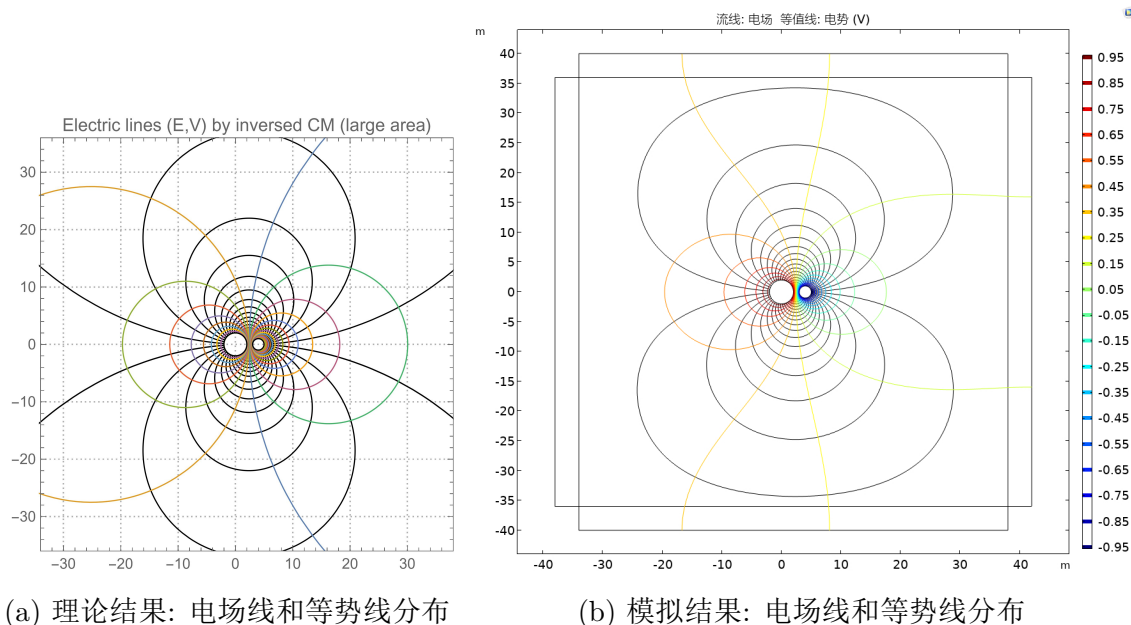


图 4 较大区域内, 电场线和等势线分布的理论结果(a)与模拟结果(b)对照, 等势线均为电势数值的等分绘图.

我们发现在靠近模拟边界的区域, 电场与电势的分布逐渐偏离, 因此猜想这是由模拟空间尺度偏小导致的. 可以想象, 假如模拟的空间为无穷大, 那么理论和模拟将呈现完全相同的结果 (因为 CM 是对复平面内无限大面积区域的映射操作). 但是在实际的模拟中, 我们只能选取有限大小的空间进行计算.

下图中绘制了理论计算与模拟结果的电势分布差值. 注意到在圆柱附近, 理论计算与模拟结果的差异近乎为零 (最大约 1.0%), 越靠近边界差异越大 (最大约 5.0%); 且低电势一侧的模拟电势偏高, 高电势一侧的模拟电势偏低, 我们认为这是由于 COMSOL 的”无限元域”选项无法很好模拟无穷大区域导致的.

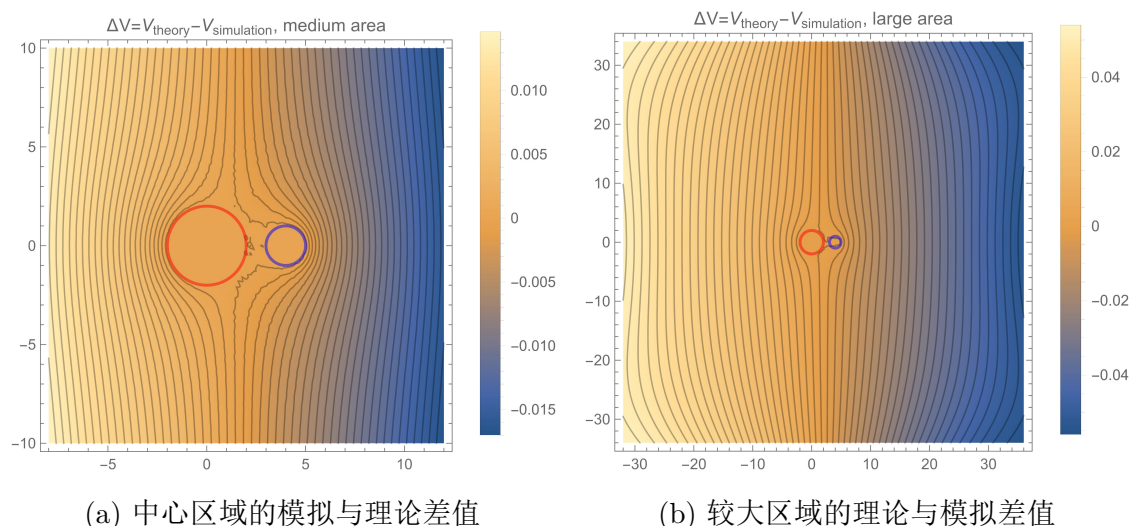


图 5 模拟与变换所得电势相差的密度图, 中心区域(a), 较大区域(b), 端子为 $\pm 1\text{ V}$, 图中颜色数值单位为 V, 横纵坐标为 xy 轴位置.

2.4 共形变换构建超材料

共形变换可以创建二维映射^[1], 因此我们考虑 TE 波在二维平面上传播的情况 (电磁场的 $\vec{\mathbf{E}}$ 垂直纸面), 如此情况下, 介电常数张量应当仅存在对角线项, 且 xy 方向对应项目的取值任意, 这里取 1.

进一步, 我们假设变换仅涉及磁导率的对角线项, 非对角线项在变换前后均为 0, 磁导率为 $\mu = \vec{\mathbf{1}}$, 介电常数为 $\epsilon = \{1, 1, \epsilon_{zz}\}$.

无源非导电不色散介质中, 电磁波由简化 Maxwell 方程组(2.4.1)描述.

强调阻抗不匹配

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = 0 \\ \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \\ \nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

考虑单色场, 通过代换能够得到仅包含 $\vec{\mathbf{E}}$ 或 $\vec{\mathbf{B}}$ 的 Helmholtz 方程(2.4.2).

$$(\nabla^2 + k^2)\{\vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{E}}\} = 0 \quad k = n_z k_0 = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} k_0 \quad (2.4.2)$$

我们关注 TE 波中电场 E_z 分量的情况. 上述 Helmholtz 方程变为标量式(2.4.3)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + n_z^2 k_0^2 \right) E_z = 0 \quad (2.4.3)$$

通过代换 $\partial_x = \partial_z + \partial_z^*$, $\partial_y = i\partial_z - i\partial_z^*$, 可以得到

$$(4\partial_z \partial_z^* + n_z^2 k_0^2) E_z = 0 \quad (2.4.4)$$

选取共形变换 $w = \xi + i\eta w(z)$, 可得

$$(4\partial_w \partial_w^* + n_w^2 k_0^2) E_z = 0 \quad (2.4.5)$$

其中 $n_z = n_w \left| \frac{dw}{dz} \right|$ 均为实数, 用于保持复平面 Helmholtz 方程形式不变.

相应的, 变换后的复平面 Helmholtz 方程, 对应的实平面的 Helmholtz 方程(2.4.6).

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + n_w^2 k_0^2 \right) E_z = 0 \quad (2.4.6)$$

一般我们选择 $n_w = 1$, 则在 w 平面内, 电磁场为平面波.

通过选择合适的共形变换, 可以通过逆变换得到电磁波分布情况, 同时得到对应的 $n_z(x, y) = \sqrt{\epsilon_z(x, y)}$, ϵ_z 为 z 方向相对介电常数.

相应的, 以上选择带来的实空间电介质参数为

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 \end{bmatrix} \quad \epsilon = \begin{bmatrix} n_w^2 & & \\ & n_w^2 & \\ & & \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 n_w^2 \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad \epsilon = \begin{bmatrix} n_w^2 & & \\ & n_w^2 & \\ & & n_w^2 \end{bmatrix} \quad (2.4.8)$$

$$w = w(z) \quad (2.4.9)$$

不难发现, 如上设定虽然能够很好满足对 Helmholtz 方程的控制, 但是其缺点也是明显的: 只能在二维层面完成控制, 且会因所设计材料中阻抗处处不匹配而产生明显的散射.

实际设计与映射选取将在后文第5.2章中提到.

3 变换光学

变换光学 (Transformation Optics, 后文称 TO) 一种设计超材料结构的方式, 通过设计具有特殊介电常数和磁导率空间分布的材料, 实现对电磁波的调制^[2].

本部分将会首先介绍变换光学的数学基础. 然后运用变换光学求解”Touching Spheres” 这一与等离激元共振相关的题目, 并在最后给出 TO 用于设计控制电磁波的特殊介质的操作流程简述.

3.1 数学基础

我们希望严格得出, 空间之间单射 $\{x, y, z\} \rightarrow \{q_1, q_2, q_3\}$ 前后, 为维持 Maxwell 方程组形式不变, 相对介电常数和磁导率应当作出的改变. 易知两者将会随空间映射形式变化而变化^[13].

在一个较复杂的体系中, 比如同时存在自由区域与金属区域的体系, 电磁波在这两个区域的特征是非常不同的. 电磁波在自由区域的波长相对较长 (约几千埃), 而在金属中, 电磁波以极快的速度在表面衰减, 只能透过几埃厚的区域. 这意味着, 如果我们使用均匀网格研究整个空间中电磁场的特征, 难以找到兼顾两个区域的合适的网格尺寸. 为了研究结果的精确度, 一个可以考虑的选择是按照最细的要求划分网格, 但是在电磁场变化缓慢的区域, 密集的网格会造成算力浪费.

理想的方法应该是: 设计非一致的网格, 以适应不同区域电磁场的特征, 通过坐标变换, 将网格的特征通过特定的 ϵ 和 μ 反映出来. 至此, 我们可以将该问题分成两个部分: 坐标变换, 变换后的 Maxwell 方程成立.

写出一般的坐标变换公式:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} q_1(x, y, z) \\ q_2(x, y, z) \\ q_3(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

对于一般的坐标变换 (不失一般性, 假设坐标变换可以用解析形式表示出来), 在笛卡尔坐标中均匀的网格会发生弯曲.

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.1.2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.1.3)$$

如上 Maxwell 方程, 在变换后可以写成如下形式:

$$\nabla_q \times \hat{E} = -\mu_0 \hat{\mu} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \quad (3.1.4)$$

$$\nabla_q \times \hat{H} = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \frac{\partial \hat{E}}{\partial t} \quad (3.1.5)$$

$\hat{E}, \hat{H}$ 表示修正后的电场强度和磁场强度, $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}$ 是吸收了空间变化特征的相对介电常数和相对磁导率 (张量) .

线元的长度为

$$\begin{aligned} ds^2 &= \begin{bmatrix} dx & dy & dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} dq_1 & dq_2 & dq_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

其中

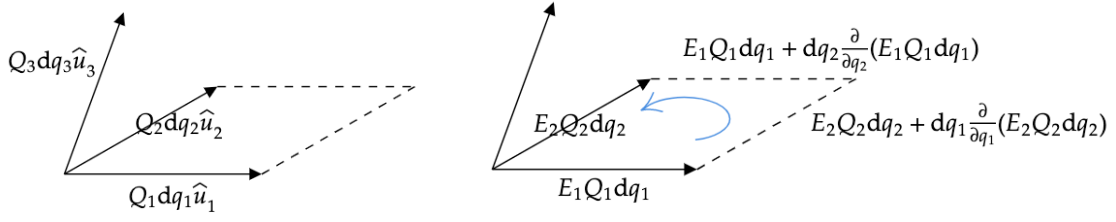
$$Q_{ij} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} \Rightarrow Q_{ij} = Q_{ji} \quad (3.1.7)$$

沿着变换后某轴向的线元长度为

$$ds_i = Q_i dq_i \quad (3.1.8)$$

其中 $Q_i^2 = Q_{ii}$.

对于无限小面元, 可以将其视为平行四边形. 假设变换后轴向的单位向量为 $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$.



(a) 视为平行四边形的无限小面元

(b) 斯托克斯定理中的线积分

图 6 对平行四边形面元(a)计算线积分 (b), 运用斯托克斯定理计算 $\nabla \times \vec{E}$

电场 $\vec{E}$ 在 $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ 方向的投影分别为

$$\begin{aligned} E_1 &= \vec{E} \cdot \hat{u}_1 \\ E_2 &= \vec{E} \cdot \hat{u}_2 \\ E_3 &= \vec{E} \cdot \hat{u}_3 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

运用斯托克斯定理

$$(\nabla \times \vec{E}) \cdot (\hat{u}_1 \times \hat{u}_2) dq_1 Q_1 dq_2 Q_2 = dq_1 \frac{\partial}{\partial q_1} (E_2 Q_2 dq_2) - dq_2 \frac{\partial}{\partial q_2} (E_1 Q_1 dq_1) \quad (3.1.10)$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{E}) \cdot (\hat{u}_1 \times \hat{u}_2) Q_1 Q_2 &= \frac{\partial}{\partial q_1} (E_2 Q_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (E_1 Q_1) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_1} \hat{E}_2 - \frac{\partial}{\partial q_2} \hat{E}_1 \\ &= (\nabla_q \times \hat{E})^3 \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

其中 $\hat{E}_1 = E_1 Q_1, \hat{E}_2 = E_2 Q_2$.

在 Maxwell 方程两边乘同一向量

$$(\nabla \times \vec{E}) \cdot (\hat{u}_1 \times \hat{u}_2) Q_1 Q_2 = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot (\hat{u}_1 \times \hat{u}_2) Q_1 Q_2 \quad (3.1.12)$$

将磁场强度写成逆变形式

$$\vec{H} = H^1 \cdot \hat{u}_1 + H^2 \cdot \hat{u}_2 + H^3 \cdot \hat{u}_3 \quad (3.1.13)$$

协变形式为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} &= g^{-1} \begin{bmatrix} H^1 \\ H^2 \\ H^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 & \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 & \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_3 \\ \hat{u}_2 \cdot \hat{u}_1 & \hat{u}_2 \cdot \hat{u}_2 & \hat{u}_2 \cdot \hat{u}_3 \\ \hat{u}_3 \cdot \hat{u}_1 & \hat{u}_3 \cdot \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \cdot \hat{u}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^1 \\ H^2 \\ H^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

或写成

$$H^i = \sum_{j=1}^3 g^{ij} H_j. \quad (3.1.15)$$

将上式代入 Maxwell 方程,

$$(\nabla \times \vec{E}) \cdot (\hat{u}_1 \times \hat{u}_2) Q_1 Q_2 = -\mu_0 \mu \sum_{j=1}^3 g^{3j} \frac{\partial H_j}{\partial t} \hat{u}_3 \cdot (\hat{u}_1 \times \hat{u}_2) Q_1 Q_2 \quad (3.1.16)$$

定义新的相对磁导率 (张量)

$$\hat{\mu}^{ij} = \mu g^{ij} \left| \hat{u}_1 \cdot (\hat{u}_2 \times \hat{u}_3) \right| Q_1 Q_2 Q_3 (Q_i Q_j)^{-1} \quad (3.1.17)$$

并定义 $\partial \hat{H}_j = Q_j H_j$. 则 Maxwell 方程变为

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{E}) \cdot (\hat{u}_1 \times \hat{u}_2) Q_1 Q_2 &= -\mu_0 \sum_{j=1}^3 \hat{\mu}^{3j} \frac{\partial \hat{H}_j}{\partial t} \\ &= (\nabla_q \times \hat{E})^3 \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

类似地, 通过引入张量相对介电常数, 也可以导出联系磁场旋度和电场变化率的 Maxwell 方程. 坐标变换后的 Maxwell 方程可以写作

$$(\nabla_q \times \hat{E})^i = -\mu_0 \sum_{j=1}^3 \hat{\mu}^{ij} \frac{\partial \hat{H}_j}{\partial t} \quad (3.1.19)$$

$$(\nabla_q \times \hat{H})^i = -\varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \hat{\varepsilon}^{ij} \frac{\partial \hat{E}_j}{\partial t} \quad (3.1.20)$$

相对介电常数张量和相对磁导率张量的变换规则为

$$(\hat{\varepsilon}^{ij}, \hat{\mu}^{ij}) = (\varepsilon, \mu) g^{ij} \left| \hat{u}_1 \cdot (\hat{u}_2 \times \hat{u}_3) \right| Q_1 Q_2 Q_3 (Q_i Q_j)^{-1} \quad (3.1.21)$$

上述流程即通过变换光学设计合适介质分布的方法. 即选定变换的空间映射, 计算空间映射的度规, 基于度规计算前后空间中介电常数与磁导率关系.

以上方法可以将难以求解的三维电磁场问题, 转换为已于求解的构型. 形象的说, 即电磁场”嵌入”了”空间网格”中, 将会随着空间网格的拉伸而拉伸, 且过程中通过改变介质性质的分布, 保证变换前后电磁场严格满足 Maxwell 方程组.

3.2 一道题目: Touching Spheres

在项目展示交流会中, 周磊老师提出, 两个非常靠近的金属球 (Touching Spheres) 的辐射行为可以利用共形变换或者变换光学的方法进行研究. 据此, 我们对相关文献进行了调研.

除了隐身衣等应用, 共形变换与变换光学还被应用于研究二维体系中表面等离子体辅助现象. 文献^[10]利用切球坐标 (Tangent-Sphere Coordinate), 对一对

相互接触的孪生金属球的静电特性进行了研究. 对于两个金属球接触点的奇异行为, 文献^[14]提出了一种普遍适用的三维变换光学方法, 研究了非常接近的两个金属体系中奇异点的电磁行为: 两个相互靠近的纳米级金属球在接触点处具有极其有效的光收集能力; 以及单个纳米球与平坦金属表面接触时, 场强显著增强. 该方法给出这些几何体系中电磁强度的解析表达式, 并证明了在包含奇点的纳米粒子构型中, 辐射从远场转移到近场时, 表面等离子体模式 (surface plasmon modes) 起到了基础作用. 接下来以相互接触的金属球为例介绍这一工作:

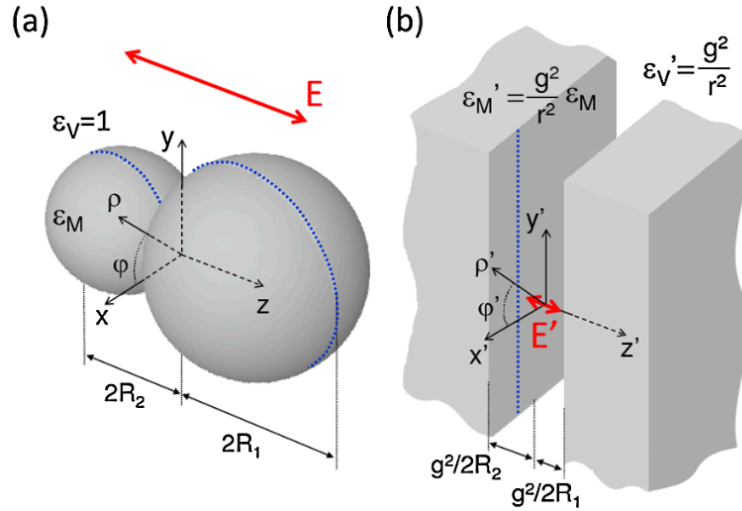


图 7 两个相互接触的金属球变换成为一对无限大平行板, 引用自文献^[10]

利用坐标变换 $\vec{r}' = \vec{r}g^2/r^2$ (其中 g 为任意比例常数), 可以将两个相互接触的球体变换成两个平行的无限大平面. 根据光学变换原理, 平行板之间填充介质的等效相对介电常数随着坐标变换发生相应的变化 $\epsilon'(\vec{r}', \omega) = \frac{g^2}{r'^2} \epsilon(\omega)$, 具有各项异性的特征. 根据坐标变换后的高斯定律

$$\nabla' \left(\frac{1}{r'^2} \nabla' \Phi'(\vec{r}') \right) = 0 \quad (3.2.1)$$

可以解出变换后的势函数

$$\Phi'(\vec{r}') = \sqrt{\rho'^2 + z'^2} \int dk \mathbf{J}_0(k\rho') \left(B^+(k)e^{kz'} - B^-(k)e^{-kz'} \right). \quad (3.2.2)$$

为了研究变换前奇点的特性, 要求势函数在接触点处具有连续性, 在变换后的坐标中, 它对应着在无穷远处势函数具有连续性. 由于组成势函数的零阶 Hankel 函数的特征, 无穷远处的连续性将导致在变换后的空间中, 坐标原点成为奇点. 这一问题可以由适当的电荷分布解决.

研究发现, 金属球表面场强随着方位角震荡增强, 在接触点处显著增强, 达到 10^4 量级, 这一结果远大于单粒子共振, 即周老师提到的”两球接触处能够产生强烈的等离激元共振”.

3.3 变换光学构建超材料

变换光学建立了任意两个能够产生单射关系空间的“保电磁场”介质性质关系. 不难想象, 我们能够将“无限大均一各向同性介质中存在平面波电磁场”的最简单情形, 通过有限次数变换光学方法指导下的变换, 使得电磁场按操作者的意愿分布. 如果能够找到一种变换, 将上述“最简单情形”与一空间联系, 该空间中存在“空位空间”(即对应变换奇点, 或无法从“最简单情形”中映射过来), 那么该“空位空间”也就能实现“隐身”(因为电磁波将不从中穿过), 同时也能依据该变换的数学形式找到隐身衣在实际空间中的介电常数与磁导率分布.

实际设计与映射选取将在后文第5.1章中提到.

4 相位调制超构表面

在周磊老师组和浙江大学合作的文章^[4]指出, 使用超构表面控制波前相位控, 搭配零折射率材料传递波, 可以达到隐身衣的效果. 我们希望采用文章中的相位梯度超构表面的设计, 用于 CM 隐身衣的改进.

本部分将会定性介绍相位调制表面的数学推导, 给出本课题中所选择位形的推导结论, 并通过COMSOL模拟检验了超构表面相位梯度的效果.

关于 CM 隐身衣相位修正的具体策略, 将会在第6节中进一步介绍.

4.1 原理简述

相位调制面板的结构类似“三明治”的 ABA 结构: 中间的电介质板上下存在金属膜图案, 且应当注意一般三明治的厚度远小于需要控制的波长, 降低所需考虑问题的难度. 当波长大于该图案尺度的电磁波尝试通过时, 上下面板的金属片层将会产生感应电流, 且上下金属图案中“反平行”的电流分量能够等效成为介质本地的磁导率.

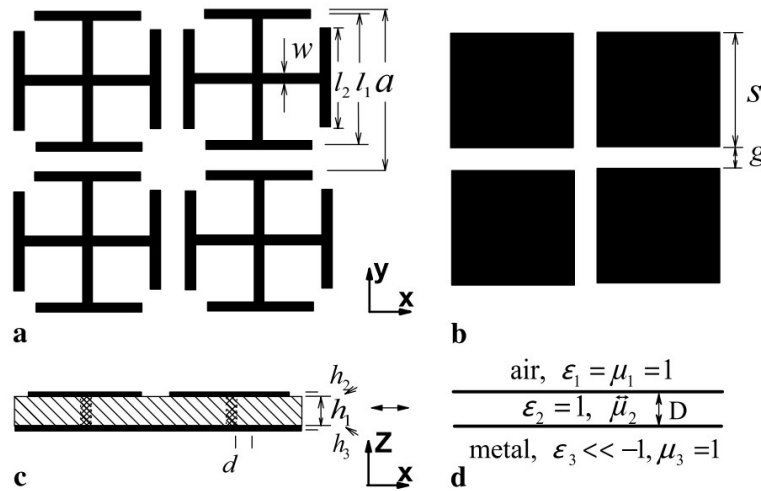
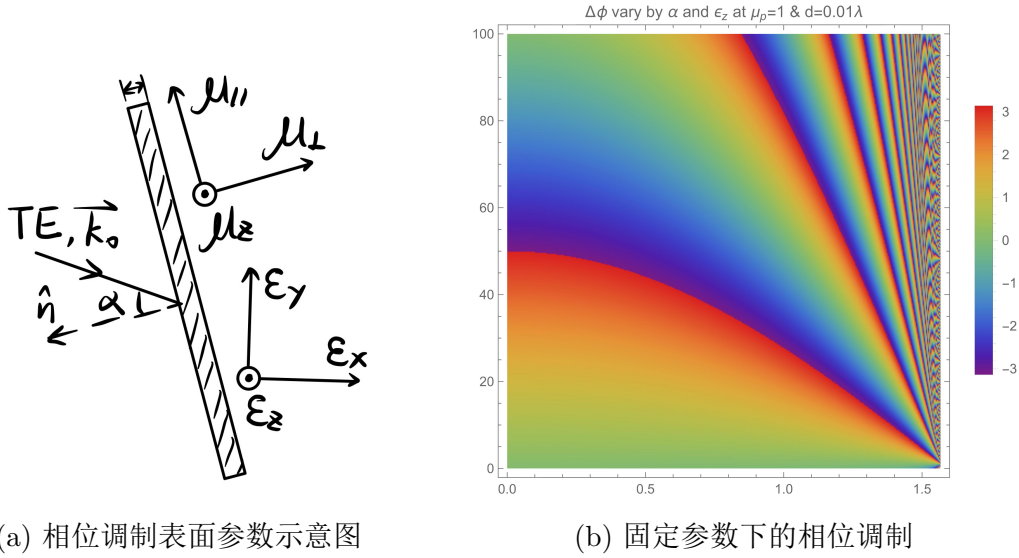


图 8 “三明治”ABA 结构示意图, 引用自文献^[15]. (a) 与 (b) 为上下表面金属膜形状, (c) 为中线剖面图, (d) 为所等效介质层示意图.

文章^[15]和^[16]指出, 对于如上 ABA 三明治的超构表面, 可以等效为沿表面法向堆叠的二维各向异性电介质块, 可以通过 FDTD(见^[8], 即将空间划分三维正方格, 通过格内电磁场的顶点选取能够方便计算旋度和散度) 进行有限差分计算, 可以得到不同图案在不同频率响应下等效的电介质参数. 如此可以通过等效的电介质, 理论计算出表面的散射性质, 如反射透射率及其幅角, 透射光的偏振性质等等.

对于三维空间中的多层等厚无限大介质平板堆叠, 我们可以使用四阶转移矩阵^[11]的方法, 首先计算介质内的电磁波本征模式 (通过 Helmholtz 方程), 其次建立每层介质的入射出射波的关系, 将面板见电磁波的关系转换为转移矩阵的乘法, 连接接入射波函数和出射波函数, 进而得到其透射和反射的物理性质.

4.2 数学推导



(a) 相位调制表面参数示意图

(b) 固定参数下的相位调制

图 9 相位调制表面参数示意图(b), 使用相位调制表面调整波前相位(a)

本课题相位调制表面的位形如图(a)所示, 为一平行于 z 轴的无限大介质板, 处于背景各项同性介质 (可以理解为真空) 的环境下. 一单色波波矢为 k_0 , 考虑 TE 波的入射情况. 对该背景介质中一厚度为 d 电介质平板, 如图9(a), 取相对介电常数 $\{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z\} = \{1, 1, \epsilon_z\}$, 相对磁导率为 $\{\mu_{\perp}, \mu_{\parallel}, \mu_z\} = \{\mu_{\perp}, \mu_{\parallel}, 1\}$, 其中垂直 $\perp$ 和平行 $\parallel$ 均为相对电介质平板表面.

对于的位形设定实际上是文章^[11]中所考虑堆叠介质层的最简化版本, 我们需要使用 Maxwell 方程计算 TE 波在其中的传播行为, 然后通过 Maxwell 方程组的边界条件连接介质表面内外的电磁场, 即可得到介质透射反射系数与入射角度等参数之间的关系.

在时谐场下的波动方程形式为

$$\vec{k} \times (\overleftarrow{\mu_r}^{-1} \cdot \vec{k} \times \vec{E}_0) + k_0^2 \cdot \overleftarrow{\epsilon_r}^{-1} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (4.2.1)$$

化简可以得到

$$\begin{bmatrix} k_0^2 - k_y^2 - \frac{k_z^2}{\mu_{r\parallel}} & k_x k_y & \frac{k_x k_z}{\mu_{r\parallel}} \\ k_x k_y & k_0^2 - k_x^2 - \frac{k_z^2}{\mu_{r\perp}} & \frac{k_y k_z}{\mu_{r\perp}} \\ \frac{k_x k_z}{\mu_{r\parallel}} & \frac{k_y k_z}{\mu_{r\perp}} & k_0^2 \epsilon_{rz} - \frac{k_x^2}{\mu_{r\perp}} - \frac{k_y^2}{\mu_{r\parallel}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \quad (4.2.2)$$

必须有 $\det = 0$, 同时选择 $k_z = 0$, 得

$$(k_0^2 - k_x^2 - k_y^2) \left(k_0^2 \epsilon_{rz} - \frac{k_y^2}{\mu_{r\perp}} - \frac{k_x^2}{\mu_{r\parallel}} \right) = 0 \quad (4.2.3)$$

可以看到, 介质中的激发模式有两种, 第一种是 $(k_0^2 - k_x^2 - k_y^2)$, 对应 TM 波, 第二种是 $(k_0^2 \epsilon_{rz} - \frac{k_y^2}{\mu_{r\perp}} - \frac{k_x^2}{\mu_{r\parallel}})$, 对应 TE 波. 显然应该选择第二种 TE 波作为本征激发模式进行后续计算.

在此基础上, 取参数 $a = \sqrt{\epsilon_z - \sin^2 \alpha / \mu_{\perp}}$, $b = \sqrt{\mu_{\parallel}}$, $\phi = abdk_0$, 则对于此电介质平板, 波前透射系数可以写作(4.2.4)形式.

$$t = \frac{2 \cos \alpha}{2 \cos \alpha \cos \phi - (i a/b) \sin \phi - (i b/a) \sin \phi \cos^2 \alpha} \quad (4.2.4)$$

式中有许多可以主动选择的变量, 我们通过规定 $|t| = 1$ 进行对 $\mu_{\parallel}$ 的约束, 可得(4.2.5), 进而化简透射系数, 得到 $t = \exp(i\phi)$. 同时 ϕ 也将化简为(4.2.6)形式, 即如此情况下, 波前透射系数模为 1, 相位将会增加 ϕ .

$$\mu_{\parallel} = \frac{\epsilon_z - \sin^2 \alpha / \mu_{\perp}}{\cos^2 \alpha} \quad (4.2.5)$$

$$\phi = \frac{dk_0}{\cos \alpha} \left(\epsilon_z - \frac{\sin^2 \alpha}{\mu_{\perp}} \right) \quad (4.2.6)$$

至此, 我们可以有很大自由度, 选择技术上能够实现的参数, 制造所需要的超构表面.

文献^[4]中进一步约束 $\mu_{\perp} = 1$, 并且选取 $d = 0.01\lambda$, 就可以得到对于任意入射角度, 通过改变 ϵ_z 实现相位控制的函数(4.2.7), 其绘图结果如图9(b)所示, 横轴为入射角度 α , 纵轴为 ϵ_z , 颜色密度分布代表 $\Delta\phi$, 已经对 $\Delta\phi$ 进行回归 $(-\pi, \pi)$ 的整理.

$$\Delta\phi(\alpha, \epsilon_z) = \frac{0.02\pi}{\cos \alpha} (\epsilon_z - \sin^2 \alpha) \quad (4.2.7)$$

至此, 在上述位形选择和部分介质参数选取的约束下, 调整相位控制表面的 ϵ_z , 即可在理论上保证透射系数 $|t| = 1$ 的情况下达到控制透射波相位的目的.

以上即为超构表面控制波前相位的理论.

4.3 物理实现

如前所述, 相位调制面板的具体物理实现是 ABA 的”三明治”结构, 上下金属膜在外界电磁场激励下产生电流, 导致中间介质板内部存在金属膜电流带来的磁场. 这个结构可以等效为具有某种介电常数的各向异性均匀介质层. 相应的, 不同介质层的等效介电性质可以通过 FDTD 模拟求解.

对于不同的控制需求, 我们可以选择不同的上下层金属膜图案, 如”H”形状^[3], 方框形状^[4], ”基督教十字”或全金属 (如图8), 进而实现不同的等效介质层效果. 如选择单侧为全金属 (即在波传播的方向无图案而为均匀金属面), 搭配合适另侧图案, 则可以实现反射波相位的调节^[3]; 选择”ABA”结构则可以获得透射率 t 膜较大且相位可调的相位面板^[4].

通过特定蚀刻图案的超构表面对电磁波进行调控, 还有其他的实现方法, 如^[17]中通过 V 形天线的两个本征共振的基态实现不同相位的透射, 通过将不同张角 V 形天线排列从而达到控制相位表面的效果.

4.4 COMSOL 模拟相位梯度表面

我们对文献^[4]中的相位控制面板使用COMSOL模拟进行了复现 (如图10), 使用文献中所选择的电介质参数, 固定入射角 $\alpha = \pi/3$, 变化 $\epsilon_z = [1, 100]$, 结果生成 gif 动态图, 见补充材料中相位调制表面验证_电场模_能流.gif 与 相位调制表面验证_电场Ez_能流.gif.

应当注意的是, 此处的模拟直接采用介质层本地均匀的电介质参数, 而不是带入了实际的物理设计.

模拟中可以发现, 当 ϵ_z 较大时, 可见微弱的反射场 (与入射场形成干涉), 这是因为阻抗匹配不合适导致的: 虽然透射率模为 1, 但是其存在相位, 因此反射部分必然存在. 这一现象在相位调制表面验证_电场模_能流.gif 文件中效果更加明显. 同时在动态图中也可见, 散射随介质参数变化存在周期性规律, 即有时反射极大, 我们认为是此介质参数情况下出现了接近 FP 干涉的参数设定, 导致透射或者反射骤然增加.

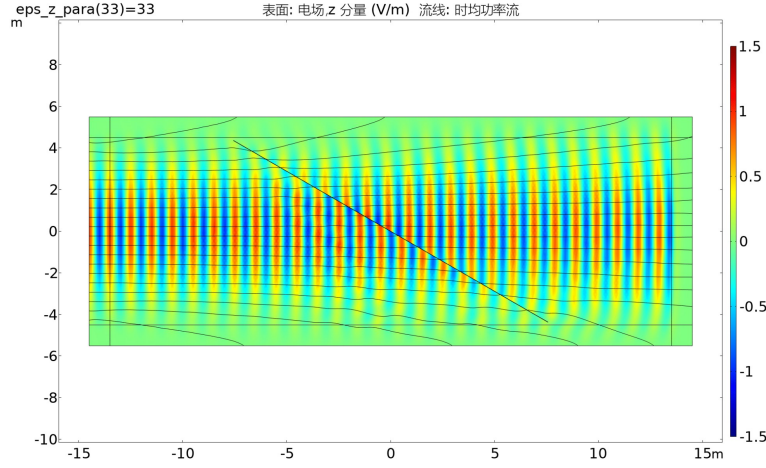


图 10 相位调制表面 COMSOL 模拟图

5 隐身衣的电磁波控制原理及模拟

先前已有文章^[12]对相关内容进行讨论和模拟, 并定量计算散射界面, 对隐身衣的性能指标进行了讨论. 我们复现了其中的模拟, 并更多关注于其中的物理图像, 并基于相位梯度表面对现有设计进行了部分改进.

5.1 隐身衣的变换光学实现

考虑二维情况 (对应柱坐标). 选取空间变换

$$\begin{cases} r' = \frac{R_2 - R_1}{R_2} r + a \\ \theta' = \theta \\ z' = z \end{cases} \quad (5.1.1)$$

则相应的相对介电常数和相对磁导率为 (在半径介于 $R_1 \sim R_2$ 的环形区域内):

$$\begin{cases} \epsilon_r = \mu_r = \frac{r - R_1}{r} \\ \epsilon_\theta = \mu_\theta = \frac{r}{r - R_1} \\ \epsilon_z = \mu_z = \left(\frac{b}{b - a} \right)^2 \frac{r - R_1}{r} \end{cases} \quad (5.1.2)$$

如前变换光学理论的讨论部分, 变换光学所设计隐身衣为对空间中有限空间的控制, 同时因为阻抗匹配, 不存在能量散射 (在能够设置理想的平滑的介电参数空间分布的前提下).

5.2 隐身衣的共形变换实现

依照前述理论, 选取 Joukowski 变换^[18], 即

$$w(z) = z + \frac{a^2}{z} \quad (a \in \mathcal{R}) \quad (5.2.1)$$

则 ϵ_z 分布为

$$\epsilon_z(x, y) = \frac{a^4 + 2a^2(y^2 - x^2) + (x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (5.2.2)$$

此时限制为, 隐身衣外半径不能无限大 (我们不能为了隐身有限区域的物体, 而修改外界全部空间介质的性质), 仅能对延 x 轴入射的平面 TE 波进行调控, 隐身区域为一半径为 a (具体取值见图片中坐标), 圆心在原点的圆形内部。

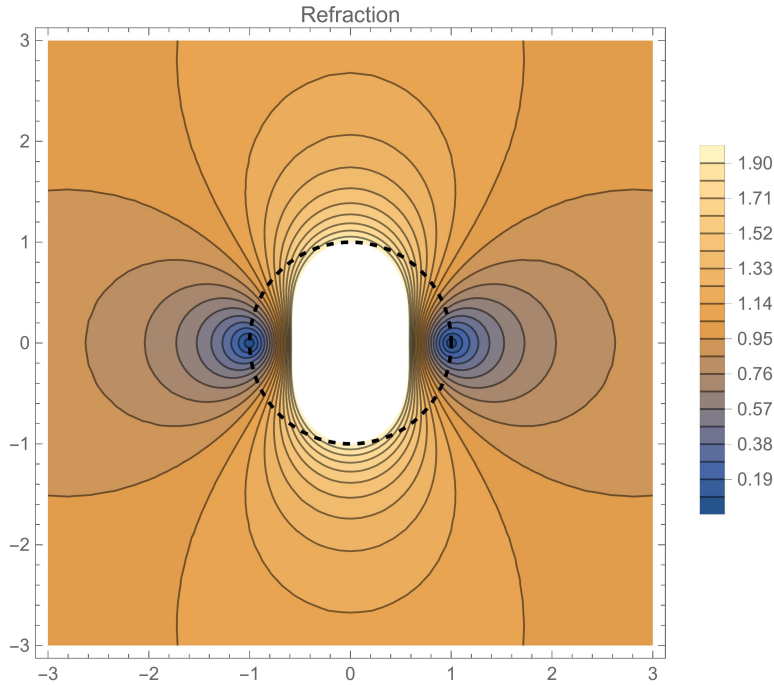


图 11 共形变换设计隐身衣的 $\sqrt{\epsilon_z}$ 在实空间分布

5.3 COMSOL 模拟

在COMSOL模拟中, 采用”波动光学”的”频域模块”。以图12(b)为例, 对模拟时软件设置进行解释 (其他模拟于其相似):

1. 模拟区域边界均为长方形, 上下水平边界采用周期性边界条件连接, 左侧位选择”散射边界条件”的入射波, 右侧通过设置”几何层”的完美匹配层实现电磁波的出射。
2. 在模拟中通过设置适当坐标系, 方便电介质参数的设定。中心隐身区域的圆形边界均选择为”理想磁导体”。

3. 为方便网格细化, 在模拟区域增加额外的几何区域, 在物理参数变化较大的区域对网格剖分进行细化, 如设定网格大小上限等.

对比可以发现, 由于隐身衣外侧并没有达到无限大, 在外表面 y 轴交界处产生了散射. 其原因为顶部 ϵ_z 略大于 1(如图11), 导致此处阻抗和真空阻抗不相同, 因为发生散射. 其实外表面于 x 轴阻抗也不匹配, 此处 ϵ_z 略小于 1.

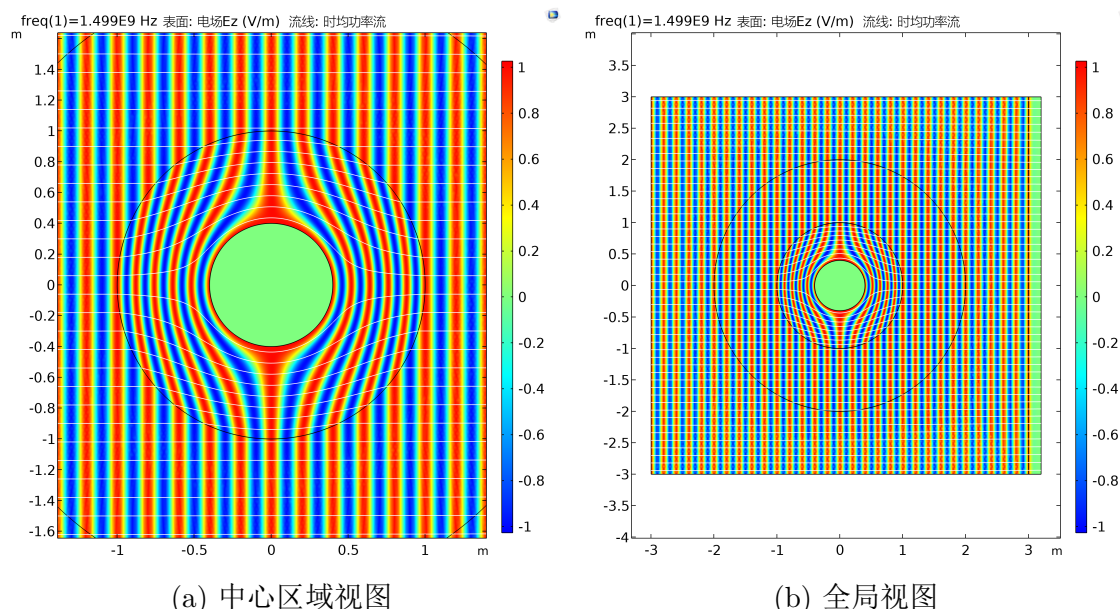


图 12 变换光学结果, TM 波电场与能流情况 (白色), cloak 中心区域(a), 全局区域(b)

从模拟结果可以看出, 光线从隐身衣外部绕行, 轨迹相对于中轴线对称. 这一结果说明在变换光学下, 不存在能流散射 (尝试进行了散射模拟, 发现仍然有一些能量散射, 认为是COMSOL有限元方法与理想情况存在一定差别导致), 隐身衣后方可以完美地呈现隐身衣挡住的区域, 使得观察者无法发现隐身衣内部隐藏的东西. 根据全局区域的场强分布, 隐身衣之外的区域不受到影响, 成功实现了有限尺度的隐身衣.

变换光学可以完美实现隐身, 是因为在这一方法中, 相对介电常数和相对磁导率的变换对坐标有完全相同的依赖性, 在隐身衣的任意区域都满足阻抗匹配条件, 故不存在能量散射, 其本质为同时考虑电场与磁场分量 (Maxwell 方程组) 的变换.

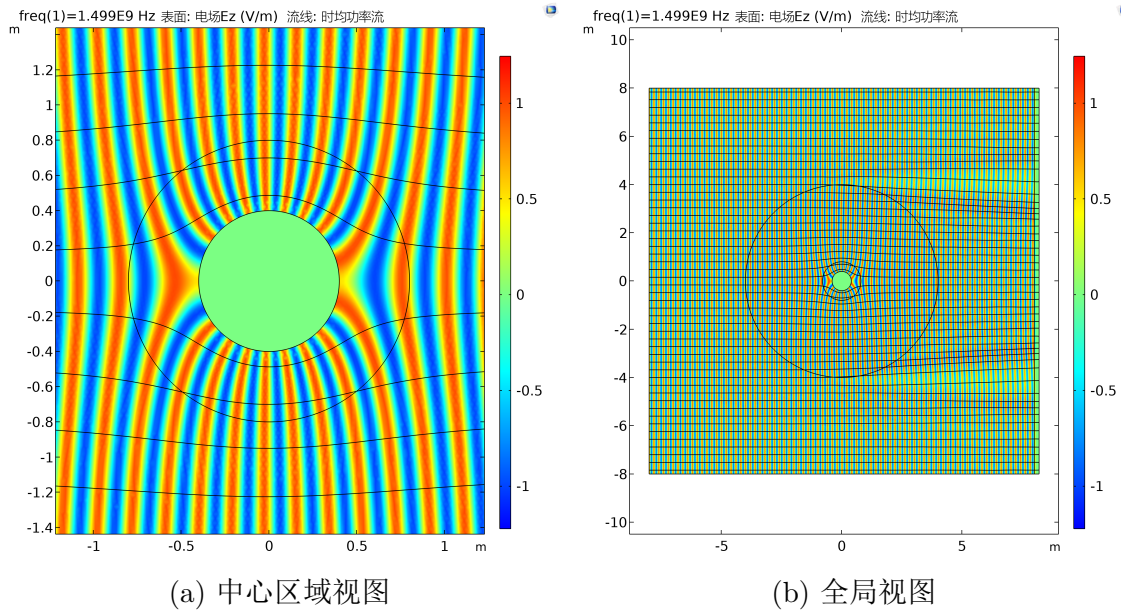


图 13 共形变换结果, TM 波电场与能流情况 (白色), cloak 中心区域(a), 全局区域(b)

共形变换中, 光线的轨迹也发生了偏转, 但模式与变换光学不同. 电磁波波前与隐身腔的相切点出现奇异行为. 尽管电场强度相对于中轴线近似对称分布, 但是从能流图可以看出, 隐身衣的上下两侧发生了明显的散射, 隐身效果不如根据光学变换设计的隐身衣. 共形变换实行的区域应为整个空间, 然而COMSOL无法模拟无限大空间, 导致截断处出现明显散射 (如图14(b)); 且共形变换依据的是亥姆霍兹方程的形式不变性, 仅对相对介电常数进行了调整, 而不考虑相对磁导率的变换, 导致阻抗不匹配, 某些地方甚至出现阻抗奇点 (如图14(a)中蓝色区域, 阻抗为无穷大). 以上两点原因共同导致出现的明显能流散射.

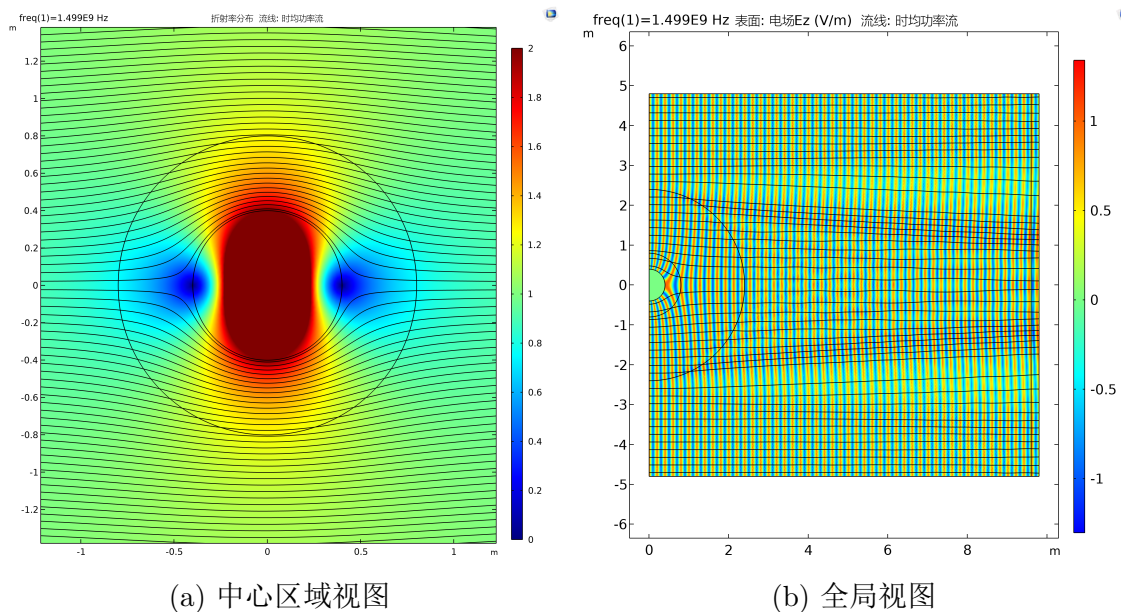


图 14 共形变换结果, cloak 中心区域折射率和能流分布(a), cloak 区域外能量散射(b)

6 通过相位调制表面改进隐身衣

本文 CM 方法所设计的隐身衣, 使用COMSOL模拟后明显可见能流的散射 (见图(b)), 这是不理想的情况, 因此我们设想通过文章^[4]中方法, 在 CM 所设计隐身衣外侧添加一层相位梯度表面, 修正其能流方向. 如此, 虽然存在因阻抗不匹配而产生的能量散射, 但是因为能流整体流向被修正为平行出射, 因此相较于先前图(b)中的明显散射情况, 可以认为修正对于提升 CM 隐身衣的隐身效果是有帮助的.

因基于 Helmholtz 方程, 因此同时适用于波长较长情况 (与隐身衣内核) 和几何光学近似情况. 在几何光学近似情况下, 我们可以计算得到不同隐身衣表面位置出射波之间的光程差, 此光程差可以近似波长较长情况下, 波前的相位差. 通过在 CM 所设计隐身衣表面增加相位调制表面层, 理想情况下可以实现对 CM 隐身衣散射缺陷的矫正.

6.1 应用相位调制改善 CM 隐身衣效果

由于该过程需要数值计算 (见附件计算相位与介电常数分布.nb), 因此我们取 CM 隐身衣的内外半径为 $\{R_1, R_2\} = \{1\text{ m}, 4\text{ m}\}$, 单色 TE 波真空波长为 $\lambda_0 = 1\text{ m}$. 不同几何参数可以通过相同计算流程进行推广.

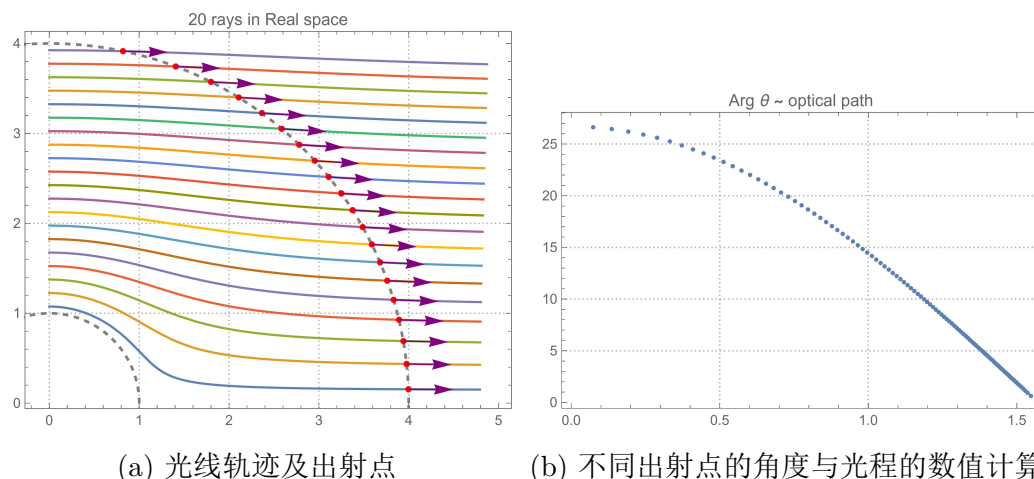
相位控制的目的是让 CM 隐身衣外侧各点出射波相位对齐, 因此应知道球面不同出射点的相位分布情况, 在此采用几何光学进行近似.

注意到在共形变换 $z \rightarrow w$ (实空间到 CM 空间), 折射率的映射为 $n_z = \left| \frac{dw}{dz} \right| n_w$, 其中 $n_w = 1$. 因此, $n_z |dz| = n_w |dw|$, 即实空间中的光程与 CM 空间中的光程对应. 基于此可以不用积分, 计算变换后空间内的光程, 即可得到对应的实空间内光程, 进而得到出射点处的相位.

因为空间对称性, 此处考虑在 Descartes 坐标系第一象限中的部分.

考察一族在实空间内从 $x = 0, y = R_1 \sim R_2$ 位置水平出射的几何近似下的光线, 如图15(a), 假定光线在出射处相位为 0, 由上述计算光程方法, 可以得到出射点坐标和光程的对应关系, 如图15(b). 该相位经过调制后, 应该满足 $-R_2 \cos \theta$ 的相对相位关系. 在此, 我们可以分别选择在 $(x, y) = (0, 4)$ 处 (即隐身衣外侧圆的”顶部”), 或 $(x, y) = (4, 0)$ (即隐身衣外侧圆的”中部”或”腰部”) 进行相位对齐.

选定对齐点后, 可在几何光学近似下, 计算得到所需相位变化随位置的分布, 进而根据前述推导(4.2.7)和(4.2.5)计算得到相位调制表面内, 相对介电常数和磁导率随位置的离散数值结果, 并在COMSOL内对数值结果进行三次样条插值, 带入计算.



(a) 光线轨迹及出射点 (b) 不同出射点的角度与光程的数值计算
图 15 cloak 区域的光线追迹(a), 不同出射点的角度与光程的数值计算(b)

作为对照, 未进行相位调制的 CM 隐身衣电场 E_z 和能流分布如图16所示. 可见明显的能流散射趋势: 出射能流有较大斜率.

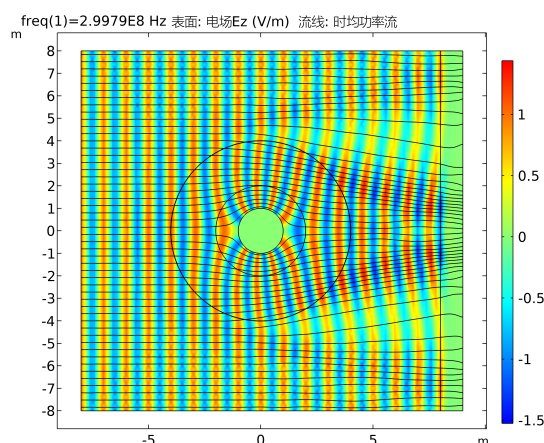


图 16 未进行相位调制的 CM 隐身衣电场 E_z 和能流分布

6.1.1 顶部对齐

顶部对齐后结果如图17(a)所示. 可见能流散射趋势有所缓解, 但并不理想, 隐身衣外侧电场分布仍不均匀.

进一步计算发现, 顶部对齐所需要的超表面的相对介电常数 ϵ_z 和 $\mu_{\parallel}$ 较大 (见图17(c), 17(d)). 在先前COMSOL模拟中, 我们发现相对介电常数较大时, 会出现反射场. 且本对齐策略中, 相对介电常数较大处对应入射角 $\alpha \sim (0, \pi)$, 恰好对应单位弧度入射面积最大的圆心角位置, 因此认为反射能量干扰了改进效果.

同时图17(a)中可见电场 E_z 分量在球左右两侧的表面出分布较为不合理, 出现了相位在 ϕ 方向的 4 ~ 5 次交替, 这可能是强烈的反射造成的.

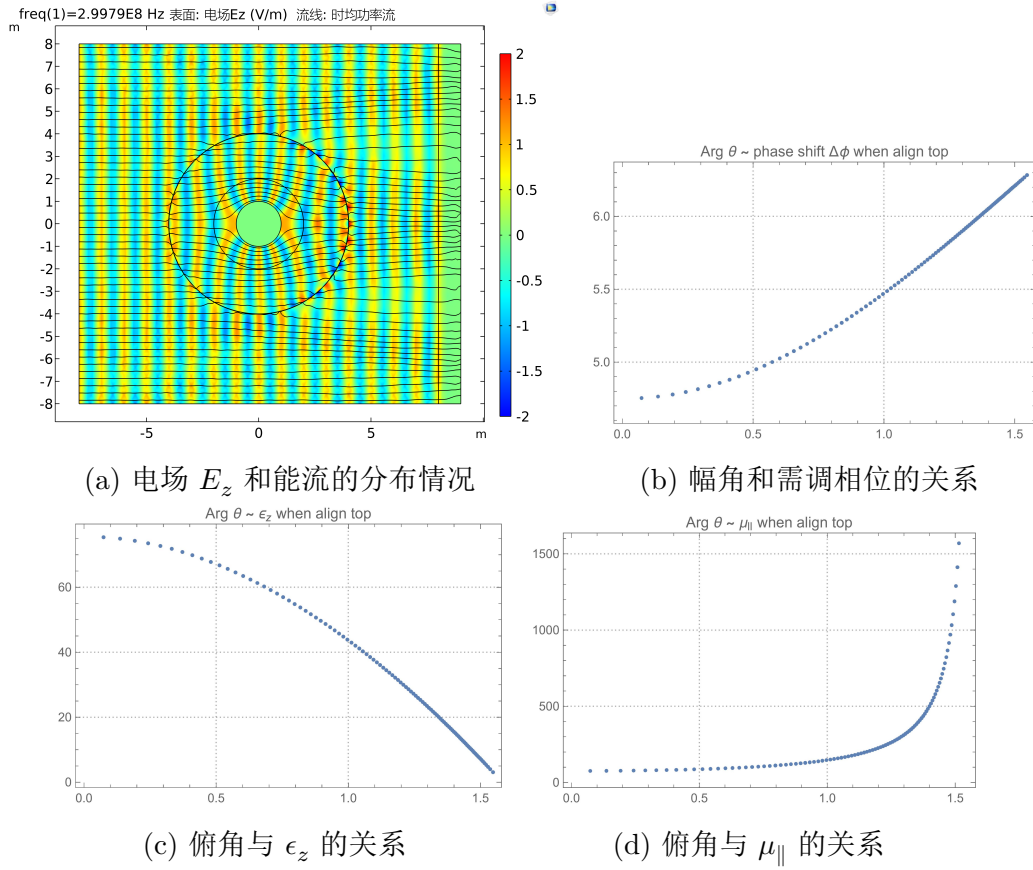


图 17 顶部对齐的电磁场分布, 和相位梯度表面的数值参数

6.1.2 中部 (腰部) 对齐

单纯进行腰部对齐, 无法得到需要的结果, 因为腰部到体系竖直中线, 隐身衣内外对应光程存在恒定插值. 因此, 需要在隐身衣中部的 y 处添加另一相位调制表面, 使得左右相位配合. 最终所得结果如图18(a), 隐身衣中部竖直相位调制面参数为 $\epsilon_z = 51.32$.

对比未增加相位调制原始图16, 顶部对齐图17(a)相比, 能流方向得到显著矫正. 相较于顶部对齐, 中部对齐所需 ϵ_z 显著较小, 对应散射较小.

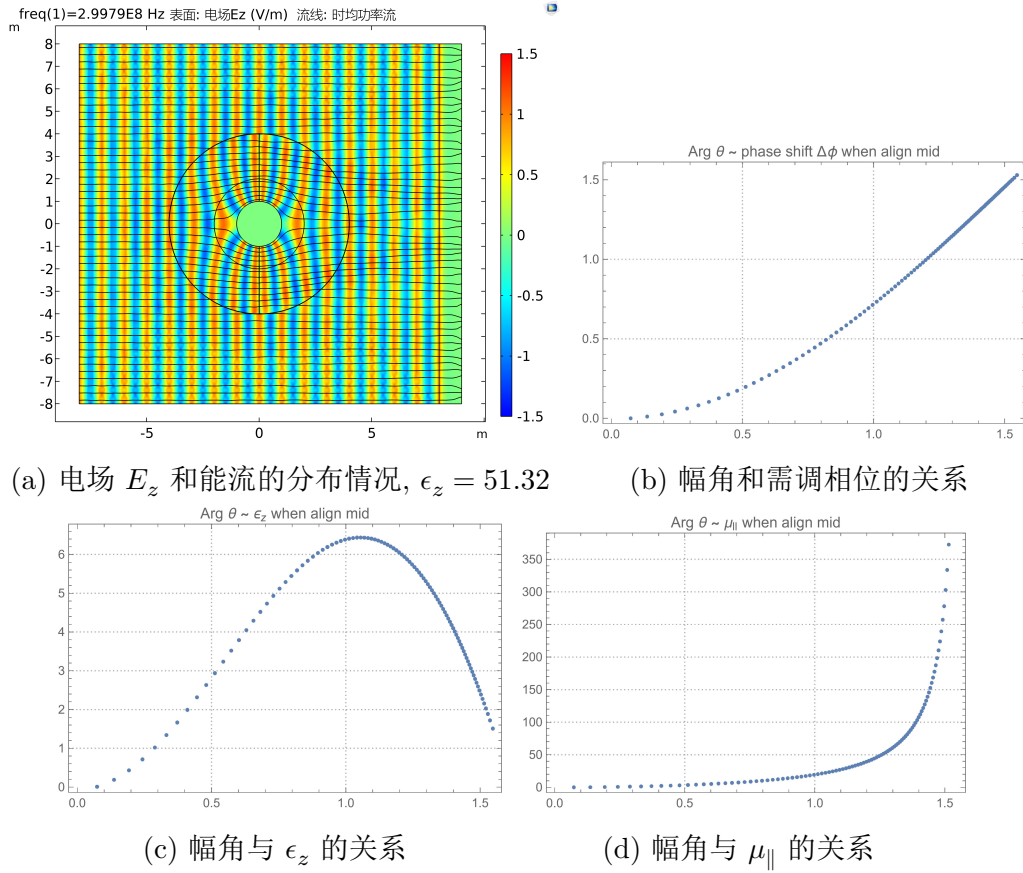


图 18 中部 (腰部) 对齐 $+y$ 轴添加相位调制面的电磁场分布, 以及相位梯度表面的数值参数

如上调控仍然存在一定电磁场的不均匀, 其可能原因为: 对齐采用的点和实际应有对齐点有一定偏差 (在顶部为奇点, 无法计算, 所以会离开一小段距离进行计算), 这将会导致 ϵ_z 的采用值与理想值存在一定偏差. 通过扫描 ϵ_z , 得到了圆形相位梯度表面的参数不变情况下的最佳解存在范围, 为 $\epsilon_z = 50 \sim 53$. (眼睛看确实没看出来什么明显区别, 见附件改变中部相位板参数.gif). 且模拟中部分参数出现强烈的散射, 我们认为此时参数设定接近 FP 干涉的共振峰, 导致相位面板的反射增加.

6.2 结果讨论

在 TO 和 CM 所设计圆柱形隐身衣中, 我们发现两种方法的异同如下:

1. 理想情况下 TO 不存在能量散射: CM 设计隐身衣存在阻抗不匹配现象, 因此将会存在能量散射, 而 TO 全空间阻抗匹配是推导初始的假设.
2. TO 可以控制电磁波的空间维度更高: CM 仅仅能进行二维层面的设计, 而 TO 为三维层面的设计.
3. TO 控制电磁波的情况更普遍: CM 仅主动调控了 ϵ_z , 因而仅能控制 TE 波. TO 可以控制任意偏振情况.

4. TO 设计的材料可以是局域的: TO 可以通过设计有限区域内的电磁介质性质来控制电磁场, 而 CM 因其针对全空间进行变换, 而不得不设计 (理论上) 无限大的电磁介质性质控制的空间范围.
5. TO 的设计自由度更高: CM 方法依赖于复空间全纯函数, 因而存在映射变换的区域必然在变换前后存在无穷大的情况, 而 TO 理论上可以实现任意形状的有限区域内的电磁场调控.
6. TO 设计结果更普适: CM 设计仅沿复空间的 x 轴入射光线才有隐身效果, TO 设计隐身衣在平面内任一方向均能实现隐射效果.
7. 两者的相同点是: 都可能设计出来难以实际实现的电磁介质性质, 如介电常数和磁导率存在奇点等, 导致实际中无法实现, 或者在现有技术下只能在特定波段实现.

此外, 在本节相位调制表面设计下, 透射系数 $t = \exp(i\phi)$, 其模为 1 但存在相位差. 对于所采用 TE 波可以认为 $1 + r = t$, 因此反射系数 r 有一定大小, 且相位变化 $\Delta\phi$ 的大小与 r 的模正相关. 也正因此, 进行中部相位对齐 (见第6.1.2节) 时产生能量散射远小于进行顶部对齐, 因为前者相对于入射波正面处所需相位调整小, 对应反射能量占比小.

此外, 在中部相位对齐情况下, 虽然隐身衣层内存在相位调制表面且为正入射, 但是其背景阻抗较大 (见图11), 因此实际散射并不明显, 对隐身效果的影响较小.

关于设计任意形状的隐身衣, 文献^[19]中指出可以使用非均匀有理 B 型样条^[20]对二维边界进行贝塞尔曲线插值, 所得结果配合 TO 理论能够进行二维隐身衣设计. 三维情况暂未找到相关文献.

7 总结

综上所述, 本文基于共形变换, 变换光学和梯度超构表面理论, 对理论的相关应用, 隐身衣设计和改进进行了详细讨论, 并使用有限元软件COMSOL对所讨论内容进行了验证. 首先完整介绍了共形变换和变换光学的原理, 并应用两者求解了平行圆柱极板和 Touching Spheres 两个物理问题, 接着阐述了两理论用于设计电磁波隐身衣的操作流程, 以及梯度超构表面的原理和物理实现. 随后采用共形变换和变换光学设计了圆柱形隐身衣, 并使用COMSOL模拟并验证两者隐身性能, 发现阻抗不匹配和介质区域有限大导致共形变换隐身衣的能量散射. 特别的, 我们在共形变换所设计隐身基础上, 在计算机辅助下使用梯度超构表面进行相位修正, 成功提升其隐身效果, 显著减少了原设计中的能量散射.

致谢

感谢周磊老师在第一节课中介绍了许多前沿工作, 并且将一学期的课程作为脚手架, 在夯实物理基础的同时, 帮助我们尽可能接近前沿问题, 并获得一定的解决问题的能力. 老师上课不断提到的“物理的理解”和 Benchmark 对我们影响颇大. 这使得我们不再拘泥于物理的“数学”, 而是更深入讨论物理的“物理”, 反过来更深刻的物理理解也能帮助我们更顺利的写出物理的数学. 感谢朱晗助教提供了COMSOL模拟中的帮助, 和文献检索的帮助.

荣誉课的项目则是一次不乏物理图像, 解析计算, 数值模拟的绝佳实践. 对于这样一门继承与创新交相辉映的课程, 相信《电动力学》最大程度地完成了它的使命.

感谢队友两人对于项目的交流与合作.

成员贡献

姜泽坤: 负责全部COMSOL模拟和绘图, 完成 CM 隐身衣的相位修正, 文章撰写, 校对和 L^AT_EX 排版.

吕盎然: 负责理论文献阅读, 寻找新的改进方法, 撰写了文章中的大部分理论推导和COMSOL模拟结果的讨论.

两人对本题目贡献大致相同.

附件

附件见文件夹supplemental_material文件夹.

1. 平行圆柱极板_理论计算和绘图.nb. 共形变换中平行圆柱极板题目的理论计算和绘图代码.
2. 相位调制表面验证_电场E_z_能流.gif. 验证梯度超构表面的COMSOL模拟结果, 为 TE 波在电场方向的绘图, 能够表明相位的情况.
3. 相位调制表面验证_电场模_能流.gif. 验证梯度超构表面的COMSOL模拟结果, 为 TE 波的电场模大小和能流方向, 能够直观看出能量的偏折.
4. 计算相位与介电常数分布.nb. 加入梯度超构表面调控相位的计算和绘图代码.
5. 改变中部相位板参数.gif. 尝试调整中部相位板介电常数的COMSOL模拟.

参考文献

- [1] LEONHARDT U. Optical conformal mapping[J]. 2006, 312: 5.
- [2] PENDRY J B, SCHURIG D, SMITH D R. Controlling electromagnetic fields [J/OL]. Science (New York, N.Y.), 2006, 312(5781): 1780-1782[2021-11-09]. <https://doi.org/10.1126/science.1125907>.
- [3] SUN S, HE Q, XIAO S, et al. Gradient-index meta-surfaces as a bridge linking propagating waves and surface waves[J/OL]. Nature Materials, 2012, 11(5): 426-431[2022-01-06]. <https://www.nature.com/articles/nmat3292>. DOI: 10.1038/nmat3292.
- [4] CHU H, LI Q, LIU B, et al. A hybrid invisibility cloak based on integration of transparent metasurfaces and zero-index materials[J/OL]. Light: Science & Applications, 2018, 7(1): 50[2021-12-13]. <https://www.nature.com/articles/s41377-018-0052-7>. DOI: 10.1038/s41377-018-0052-7.
- [5] ALÙ A, ENGHETA N. Cloaking and transparency for collections of particles with metamaterial and plasmonic covers[J/OL]. Optics Express, 2007, 15 (12): 7578-7590[2021-12-12]. <https://www.osapublishing.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-15-12-7578>. DOI: 10.1364/OE.15.007578.
- [6] ZHAN J, LI K, ZHOU Y, et al. Ultrathin conformal magnetic invisible cloak for irregular objects[J/OL]. ACS Applied Materials & Interfaces, 2021, 13 (14): 17104-17109[2021-12-12]. <https://doi.org/10.1021/acsami.1c02117>.
- [7] COOPERATION C. 有限元法 (FEM) 详解[EB/OL]. [2022-01-08]. <http://cn.comsol.com/multiphysics/finite-element-method>.
- [8] Wikipedia Contributors. Finite-difference time-domain method[M/OL]//Wikipedia. 2021[2022-01-07]. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Finite-difference_time-domain_method&oldid=1057048619.
- [9] 梁昆淼. 数学物理方法[M/OL]. 4 版. 高等教育出版社, 2010[2021-12-05]. <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=5a57cf8870df257d868c0d59b4cfa9b2>.
- [10] FERNÁNDEZ-DOMÍNGUEZ A I, MAIER S A, PENDRY J B. Collection and concentration of light by touching spheres: A transformation optics approach [J/OL]. Physical Review Letters, 2010, 105(26): 266807[2021-12-22]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.266807>.
- [11] HAO J, ZHOU L. Electromagnetic wave scatterings by anisotropic metamaterials: Generalized $\text{ifnmode} \times \text{else} \text{timestimes} \{ \} 4$ transfer-matrix method[J/OL]. Physical Review B, 2008, 77(9): 094201[2021-12-13]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.77.094201>.
- [12] URZHUMOV Y A, KUNDTZ N B, SMITH D R, et al. Cross-section com-

- parisons of cloaks designed by transformation optical and optical conformal mapping approaches[J/OL]. *Journal of Optics*, 2010, 13(2): 024002[2021-11-29]. <https://doi.org/10.1088/2040-8978/13/2/024002>.
- [13] WARD A J, PENDRY J B. Refraction and geometry in maxwell's equations [J/OL]. *Journal of Modern Optics*, 2009[2021-12-04]. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09500349608232782>.
- [14] SMITH G S, BARAKAT R. Electrostatics of two conducting spheres in contact[J/OL]. *Applied Scientific Research*, 1975, 30(6): 418-432[2022-01-07]. <https://doi.org/10.1007/BF00455966>.
- [15] HAO J, ZHOU L, CHAN C. An effective-medium model for high-impedance surfaces[J/OL]. *Applied Physics A*, 2007, 87(2): 281-284[2022-01-06]. <https://doi.org/10.1007/s00339-006-3825-4>.
- [16] HAO J, YUAN Y, RAN L, et al. Manipulating electromagnetic wave polarizations by anisotropic metamaterials[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2007, 99(6): 063908[2022-01-02]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.063908>.
- [17] YU N, GENEVET P, KATS M A, et al. Light propagation with phase discontinuities: Generalized laws of reflection and refraction[J/OL]. *Science*, 2011, 334(6054): 333-337[2021-11-16]. <https://www.science.org/doi/full/10.1126/science.1210713>.
- [18] Wikipedia Contributors. Joukowski transform[M/OL]//Wikipedia. 2021 [2022-01-07]. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Joukowski_transform&oldid=1041438149.
- [19] JIANG W X, CHIN J Y, LI Z, et al. Analytical design of conformally invisible cloaks for arbitrarily shaped objects[J/OL]. *Physical Review E*, 2008, 77(6): 066607[2022-01-09]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.77.066607>.
- [20] Wikipedia Contributors. Non-uniform rational b-spline[M/OL]//Wikipedia. 2021[2022-01-09]. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Non-uniform_rational_B-spline&oldid=1062004698.