电流逆问题

王一飞 19307110354
周晋冬 19307110335

2022 年 1 月 6 日

摘要 本课题主要研究了如何利用磁场测量来还原平面上的电流分布。我们从理论上给出了解决该逆问题的基本思路，即利用傅里叶变换来实现电流元的对角化；接着，我们从模拟和实验两个方面对我们的理论进行了检验和修正；最后，我们受实验修正结果的启发，对这一逆问题为什么可解及其影响因素进行了讨论，并将其推广到了高频的情形。

一、 引言

当我们在进行实验时，我们往往会需要知道一块导电材料上的电流分布。一方面，在医学上，这可以实现对一些神经疾病的检查[1]；另一方面，在材料研究上，这可以用于表征材料中发生的特殊效应，并被用于研究材料的性质[2]。在许多情况下，由于材料尺寸等限制因素，不能直接使用电流表进行测量。另一个很直接的想法是测量其附近空间的磁场，然后利用磁场与电流的对应的关系来求解电流分布。

但实际测量中，由于工艺要求或者空间限制等因素，我们往往很难同时精确测量磁场的三个分量。但考虑到电流往往近似是在一个平面内进行分布的，在这个限定条件下，仅需一个磁场的分量，我们就可以解得平面上的电流分布[3]。

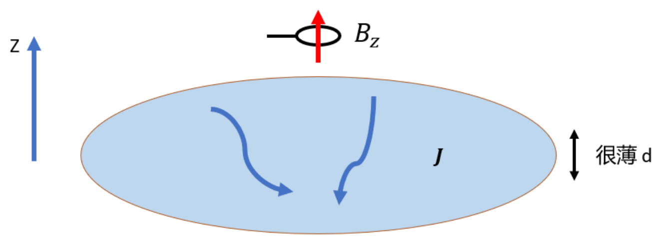


图 1: 测量磁场示意图

二、 基本思路

首先观察磁场与电流的一般性关系，即毕奥-萨伐尔定律。

$$B(x,y,z)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(x',y',z)\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d\tau' \tag{1}$$

由于只考虑平面电流，即假设:

$$\begin{cases} J_x(x',y',z')=j(x',y',z')d\delta(z') \\ J_y(x',y',z')=j(x',y',z')d\delta(z') \\ J_z(x',y',z')=0 \end{cases} \tag{2}$$

此时不妨假设测量的分量为 B_x，可以改写毕奥-萨伐尔定律为:

$$B_x(x,y,z)=\frac{\mu_0 d}{4\pi}\iint\frac{J_y(x',y',z)z}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}dx'dy' \tag{3}$$

注意到这个积分可以被看作一个卷积:

$$B_x(x,y,z)=\frac{\mu_0 dz}{4\pi}J_y(x,y,z)*G(x,y,z) \tag{4}$$

其中 G(x,y,z) 表示一个空间传播的格林函数:

$$G(x,y,z)=\frac{\mu_0 d}{4\pi}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5}$$

那么我们自然想到对其做傅里叶变换，并记 $b(k_x,k_y)=\mathcal{F}[B(x,y,z)]$，$g(k_x,k_y)=\mathcal{F}[G(x,y,z)]$，$j(k_x,k_y)=\mathcal{F}[J(x,y,0)]$。于是有:

$$b_x=gj_y \tag{6}$$

注意到 g 可以直接由傅里叶变换得到

$$g(k_x,k_y)=\frac{\mu_0 d}{2}e^{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}z} \tag{7}$$

因而我们可以直接求得

$$j_y=\frac{2b_x}{\mu_0 d}e^{\sqrt{k_x^2+k_y^2}z} \tag{8}$$

如果我们测量的是 B_z 分量，那么计算会稍微麻烦一点:

$$b_z=i\frac{\mu_0 d}{2}e^{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}z}\left(\frac{k_x j_y}{\sqrt{k_x^2+k_y^2}}-\frac{k_y j_x}{\sqrt{k_x^2+k_y^2}}\right) \tag{9}$$

注意到我们只有一个方程，但有两个未知数（j_x,j_y）因此需要再利用电流的连续性方程:

$$k_x j_x+k_y j_y=0 \tag{10}$$

我们就可以解出 j_x，j_y。

三、　方法验证

我们验证这一结果的最基本的想法是使用 COMSOL 对一个给定电流分布的体系进行模拟，并记录其一个面上的磁场，然后再将磁场作为我们求解电流逆问题的输入参量，求解电流，将结果与给定的电流分布相比对，流程图见图2。

图 2: 方法验证流程图

我们先使用一个简单的电流环作为待测体系，其磁场分布如图3所示。

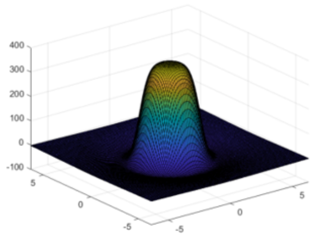


图 3: 电流环的磁场 B_z

使用本方法，求得 J_x 和 J_y 分别如图4、5所示。

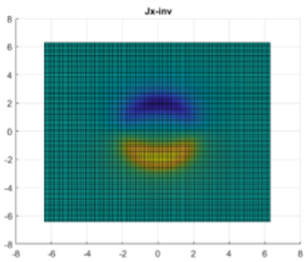


图 4: J_x

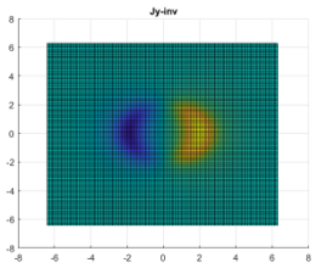


图 5: J_y

可以看到本方法求得的电流分布与预设的电流环高度吻合，表明我们的解法在满足预设条件的情况下是有效的。

我们接着试图研究少数几个点存在不连续的电流是否会对结果带来极大的影响。我们使用了交叉的电流直导线作为验证模型，这里电流在边界上是不连续的。我们模拟得出其磁场见图6

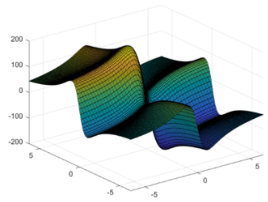


图 6: 交叉电流直导线的磁场 B_z

用这一方法得到的 J_x、J_y 见下，可以看到除了边界处存在一些预料之外的杂音，内部的电流还是吻合得较好的，这说明少数的不连续电流点不会给我们的结果带来较大的差别，这一方法有我们预料之外的容错率。

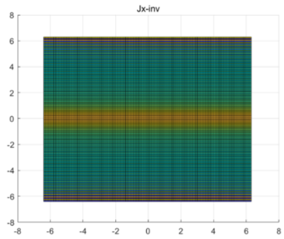


图 7: J_x

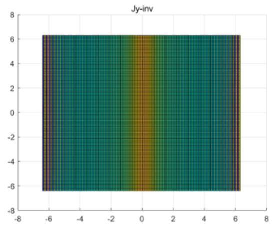


图 8: J_y

四、 实验验证与方法改进

由于之前我们使用的是模拟得到的磁场，它不存在噪声，这显然和实验中会遇到的情况不同。因此使用具体实验数据进行验证是非常必要的。

我们首先测量了一个直角电流的磁场（图9），并利用我们的方法计算了其电流分布，结果见图10。

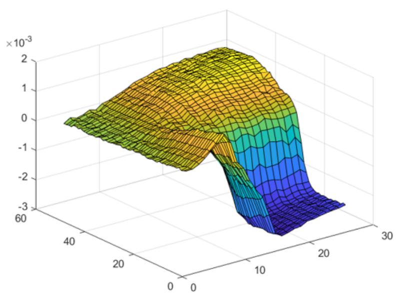


图 9: 直角电流的磁场 B_z

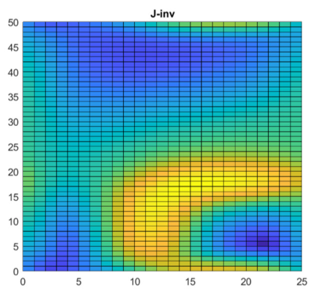


图 10: $|J|$

我们可以看到图10的结果显然是不能令人满意的，它与我们实际的电流有较大的差别。我们接下来主要解决其中三个问题，第一是边界出现电流环流，第二是电流线宽过大，第三是存在较多噪音。

4.1 边界环流

首先，电流在边界上出现了一些环流（图4.1），而这在实际体系中是不存在的。

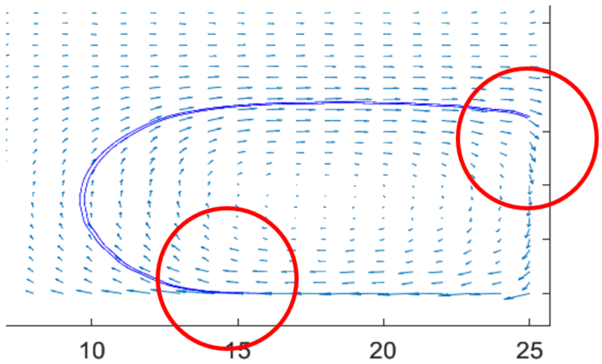


图 11: 边界环流

我们认为这可能是由于电流在边界上不满足电流连续性方程导致的。为了解决这一问题，我们将求解区域扩大一倍，并将原来边界上的电流线性外推到 0[2]，外推后的磁场见图12。这样，我们可以认为所有电流都在分布在扩展后的求解区域内，因此可以安全地使用连续性方程。

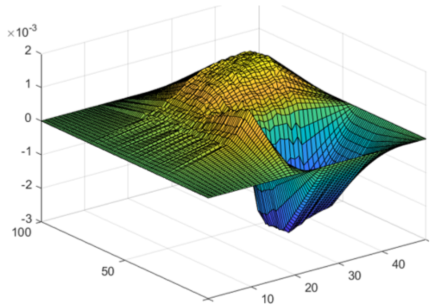


图 12: 磁场线性外推

4.2 电流展宽

其次，求解后的电流有一个较大的展宽。这里有两个可能的因素: 一是测量不够精细，还原的结果自然会更加模糊，可能会带来一个更大的展宽；二是实验测量不可能用无限小的针尖，测量结果一定是探测针尖面积内的平均值，即磁场与针尖响应函数的卷积。

第一个因素我们只能在采样时尽可能地减小其影响，但是第二项的影响我们可以通过数学手段回避[3]。考虑探测器响应函数为:

$$H(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2}, & r < a; \\ 0, & r \geq a \end{cases} \tag{11}$$

因此我们可以将频域中的磁场除以 H 在频域中的形式 $\mathcal{F}[H] = \frac{2J_1(ka)}{ka}$，消除这一项的影响。

4.3 噪音

最后，我们还观察到求解后的结果有较明显的噪音。这是由于我们在频率空间求解 $j(k_x, k_y)$ 时，我们需要除掉 k 空间中的格林函数（见式7）。由于 $e^{\sqrt{k_x^2+k_y^2}z}$ 项在高频时趋于发散，因而在求解时这一处理会急剧地放大空间中的高频噪声，整体作用类似一个高通滤波器。

但同时由于我们已知电流不会在空间上有非常快速的变化，即电流应当不会有空间上的高频项，因此我们可以使用空间滤波来解决这一问题[3]。我们选用形如式12的滤波函数。

$$H(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + cos(\frac{\pi k}{k_{max}})), & k < k_{max}; \\ 0, & k \geq k_{max} \end{cases} \tag{12}$$

其函数图像大致为:

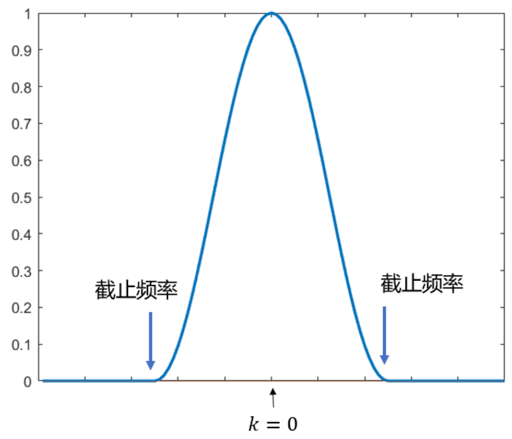


图 13: 滤波函数

它的作用是选出空间频率在 0 到 k_{max} 内的部分，舍去可能的高频噪音。

五、 结果与讨论

在经过了上述三重修正之后，我们得到的电流结果见图14。

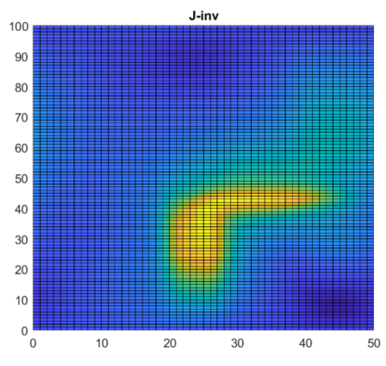


图 14: 直角导线反演

相较于图10，这一次的结果显著的变好了，而且直角也变得非常明显，这说明在处理实际实验数据时，我们的修正是有效且必要的。

接下来，我们再尝试了一个更加复杂的体系，来说明我们的方法进行修正后是可以应用于复杂体系的。我们研究一个微米量级的六电极系统，见图15。

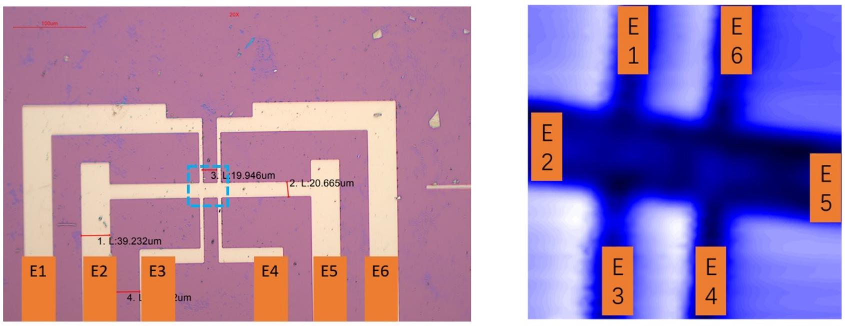


图 15: 六电极系统

我们先接通电极 E1 和 E6，测量其磁场并反演出电流，结果见图17所示。

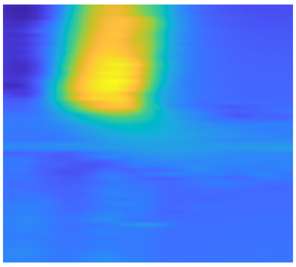


图 16: B_z

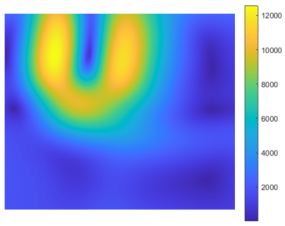


图 17: $|J|$

可以看到电流的确是在 E1 和 E6 之间，与我们的预期一致。再接通电极 E3 和 E6，测量磁场并反演电流，结果如图19。

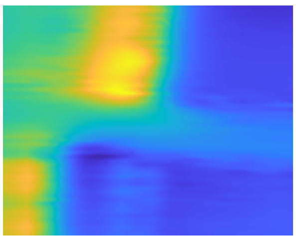


图 18: B_z

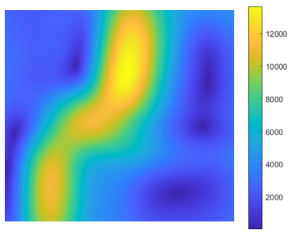


图 19: $|J|$

可以发现，我们这一方法在经过修正之后已经能够比较好地反映出电流的位置和大小，基本能够满足实验的需求，可以投入到日常实验的使用中。

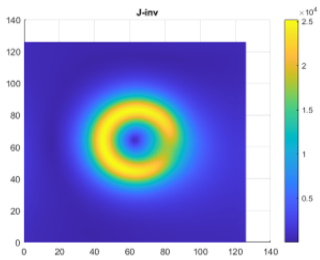
我们注意到，虽然我们的结果与模拟得到的数据符合得很好，但是在处理来自实际实验中的数据时，似乎这一方法并不是非常完美的，它需要一些修正来确保自己结果的正确性。这就促使我们

思考: 我们的理论到底有哪里可能会带来问题呢？实际实验中可能有哪些因素影响我们的结果呢？我们能否对其进行一个更一般的外推呢？下面我们将讨论采样范围、采样间隔和噪声对实际效果的影响。

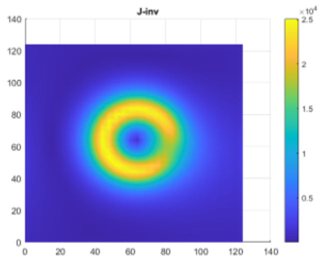
5.1　采样间隔和采样范围

我们在求解中使用了离散傅里叶变换，这肯定与采样息息相关。我们以一个右下角有缺口的电流环为例进行了采样（缺口为了帮助我们确认分辨率），以期探究采样间隔以及采样范围的影响。

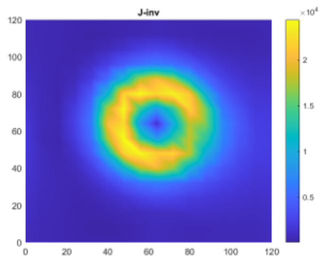
首先验证采样间隔对结果的影响，采样范围都是从 0 到 128mm，采样间隔 s 分别取 $2, 4, 8, 16$mm，结果如图20所示



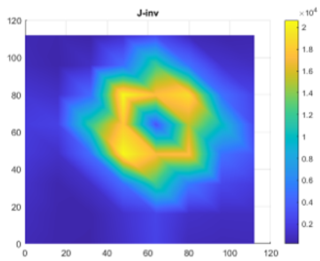
(a) $s = 2$mm



(b) $s = 4$mm



(c) $s = 8$mm



(d) $s = 16$mm

图 20: 改变采样间隔 s

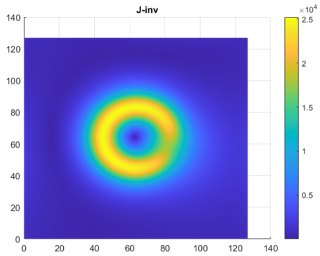
可以发现随着 s 增大，图像的大致形态保留，但细节渐渐模糊。一方面电流环变得越来越“方”，另一方面，电流环上的缺口在 $s = 8$mm 时也基本不可分辨。

接着验证采样范围对结果的影响。采样间隔都是 1mm，采样区域中心都位于原区域正中处，大小分别取 $128 \times 128, 64 \times 64, 32 \times 32, 16 \times 16\text{mm}^2$，结果如图21所示

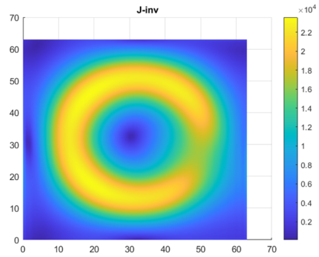
这个结果有两个特点可以分析，一是从 $128 \times 128\text{mm}^2$ 到 $64 \times 64\text{mm}^2$，图片的细节几乎没有变换，只是范围缩小。二是 $32 \times 32\text{mm}^2$ 和 $16 \times 16\text{mm}^2$ 采样区域区域小于圆环时，图形的形貌逐渐消失。当然图21(d)的区域中其实本来就没有电流，所以进一步仍然用 16×16 的区域在有电流的区域采样（图22(b)），得到图22(a)。即便此区域内有电流，也无法还原得到有效的图像。

这是正因为采样所包含的信息太少，采样区域内的磁场大部分都是区域外电流所产生了，因此无法对整体相貌进行还原。

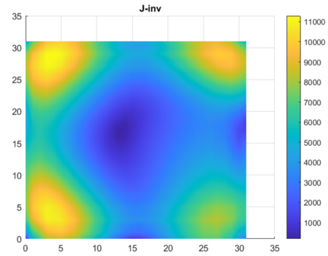
为了进一步排除采样间隔对结果的可能影响，我们进一步用 0.25mm 的间隔对 32×32 的区域



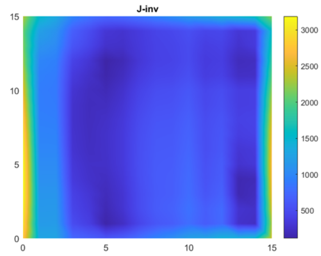
(a) 128×128



(b) 64×64

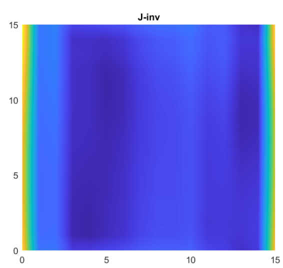


(c) 32×32

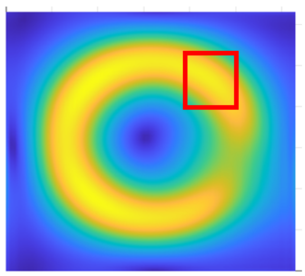


(d) 16×16

图 21: 改变采样区域



(a) 16×16 电流环上采样结果



(b) 采样区域示意图

图 22: 电流环上采样

进行了采样，结果如图23所示，它与图21(c)相比并无明显区别，所以可以排除采样间隔的影响，说明这种变化就是采样区域过小导致的。

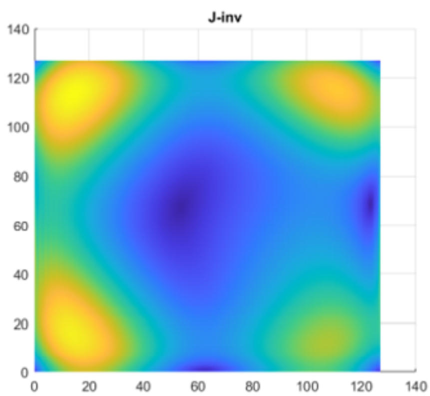


图 23: 32×32 间隔 0.25 采样

总的来看，上面两个测试可以证明，采样间隔对应图像的细节，采样范围对应图像的整体形貌，它们的取值会明显地影响最终结果的好坏。

5.2 噪声

实验与模拟的最大区别其实是噪声的有无。模拟是计算机数值计算的结果，可能会由于网格化或是计算精度等原因带来一些不同，但是它没有真实意义上噪声的存在。

为了探究噪声的影响，我们不妨一般地讨论一下噪声对于体系的作用。先考虑一个一般的变换 A,

$$f = Au \tag{13}$$

其中 u 为自变量，f 为因变量（观测量）。求解逆问题实际就是已知测量结果 f' 求 u。但实际上测量必定会带来误差，因此式(13) 应该写作

$$f' = Au + n \tag{14}$$

其中 n 就是测量引入的噪音。

我们在求解这一问题时，本质上是先对式(14)两侧做傅里叶变换，得到

$$\tilde{f'(k)} = \tilde{A}u(k) + \tilde{n}(k) \tag{15}$$

由于 A 在我们的问题中代表与格林函数卷积，它可以表示为乘法

$$\tilde{f}' = \tilde{a} \cdot \tilde{u} + \tilde{n} \tag{16}$$

简单除掉 $\tilde{a}$，再进行逆变换得到估计的 u 值

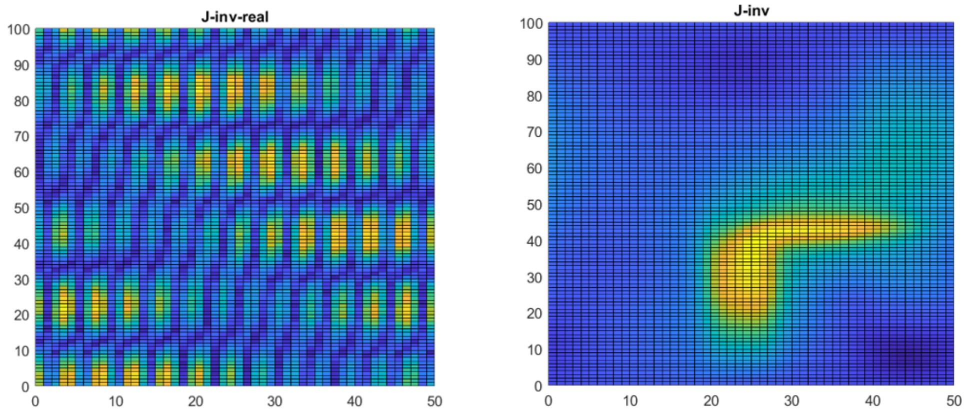
$$u_{\text{est}}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\tilde{f}'(k)}{\tilde{a}(k)}\right) = u + \frac{1}{2\pi}\int \frac{\tilde{n}(k)}{\tilde{a}(k)} \mathrm{e}^{ikx} \mathrm{d}k \tag{17}$$

因为我们的问题中，格林函数的傅里叶变换 $\tilde{a}(k) \sim \mathrm{e}^{-kz}$，故在 k 很大时，式(17)的被积函数分母趋于 0，而通常噪音在各个频段又有分布，这就使得高频的噪音对还原的信号有巨大的影响。而我们在上面所做的将边缘磁场线性外推到 0 的操作，也会带来一些高频的噪音。这就是我们之前为什么要进行方法修正的原因。

不过幸运的是，我们知道磁场傅里叶变换 b_z 不会有非常高频的分量。因此为了解决这个问题，我们可以对 $\tilde{f}'$ 乘一个低频的滤波函数，这里前面做过讨论，这里就不再赘述了。图24对比了不进行滤波和进行了滤波后结果的对比图，可以发现两者差距非常显著，不进行滤波时结果中将混入大量高频噪音。

5.3 一般逆问题的可解性

受到上面一个部分的启发，我们更一般地讨论一个逆问题的可解性问题。电磁场的逆问题是一个很大的部分，其中有很多逆问题都是病态的（如逆阻抗成像、天线优化设计以及逆散射问题等典型的问题），即解的存在性、合理性以及解的稳定性是没有保证的。但是我们在这里研究的问题: 磁



(a) 不滤波还原电流　　(b) 滤波后还原电流

图 24: 滤波前后结果对比

场单一分量对于平面电流解的问题是一个“好”的逆问题，接下来我们将对这一问题为什么可解做一些说明。

仍然考虑与式(14)相同的一个一般的变换 A,

$$f' = Au + n \tag{18}$$

其中 n 仍然表示测量引入的噪音。

解逆问题本质上就是从 f' 求解 u 的过程，为了防止这个逆问题不可解，我们应当规避以下三种情况[4]。

1. $k > d$，即观测量 f' 比自变量 u 拥有更多自由度，这使得 $f = Au$ 的值域 $\mathcal{R}(A)$ 只能是 $\mathcal{R}^k$ 的一个真子集。一旦噪音 n 使得真实测量值 $f' = f + n \notin \mathcal{R}(A)$，就不可能从 f' 出发求出 u。
2. $k < d$，即观测量 f' 比自变量 u 拥有更少自由度，因此从测量结果出发只能构造 k 个线性方程，不能唯一确定自变量 u。这种情况也许是最常见的没有唯一解的原因。比如要从有限个点的重力观测数据反推地下矿物的分布，矿物可能的分布点位当然是远远多于测量点位的数量。
3. $k = d$，且 A 可逆，但 A^{-1} 对变化非常敏感（A 接近奇异），即 $u \ll A^{-1}n$，这就使得直接做 $A^{-1}f' = u + A^{-1}n \approx A^{-1}n$，几乎被噪音充满，而无法得到有效的解。

再看我们做的磁场反推电流的逆问题。上面 1 和 2 对应的其实是一类困难，即自变量和观测量的自由度不匹配，这个困难在我们的问题中是被消除了的，原因如下

- 我们只测量磁场的 Z 分量，而原来电流密度矢量有两个分量 J_x, J_y，但我们做了电流连续性假设 $\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0$，使得这两个量不再独立，自变量的自由度减小了一半。
- 我们探测平面的格点数目和要还原的电流平面上的格点数目是一致的，并认为所有电流都被包含在被测量点位正下方的区域内，这样观测量和自变量的自由度就完全一致了（都等于格点数目）。当然这样做会带来一些问题，因为实际测量有可能不会覆盖所有有电流的区域，因此我

们采取了把测量区域边界上磁场线性外推到 0 的操作，来尽可能模拟所有电流都处在测量范围内的情况。

对于上面的第 3 个不可解的原因，我们已经在噪声的部分做过一些说明了，这里就不再赘述了。不过在我们的例子中，这一问题是可以被修正的，不过我们不妨来看一个更加经典也是更加难以处理的例子，即逆散射问题[5, 6]。

二维逆散射问题的一个简单的几何模型如图25所示。图中 D 表示成像区域，由目标与背景媒质组成。整个成像区域的对比度函数未知；背景媒质可能是自由空间，也可能是其他物质；发射天线与接收天线等距分布在成像区域周围的圆环 γ 上；图25中黑色圆点代表发射天线以及接收天线。我们使用发射天线照射目标并利用接收天线接收数据，用接受到的数据对目标的响应进行计算。

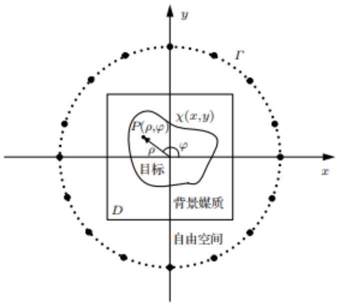


图 25: 二维逆散射模型

不妨假设使用 TM 波进行照射，再假设其频率为 ω，那么其电场强度在样品上每一点应满足方程：

$$E(x,y) = E^i(x,y) + k_0^2 \iint_D G_0^D(\rho,\rho')\chi E(x',y')dx'dy' \tag{19}$$

其中 $G_0(\rho,\rho')$ 刻画二维传播的格林函数，而 E 表示总场，E^i 表示入射场，χ 表示介质的响应。这样一来，这里就构成了一个关于 E 的函数关系式，这也被称作状态方程。而我们测量处的接受场 E^r 则满足:

$$E^r(x,y) = k_0^2 \iint_D G_0^\Gamma(\rho,\rho')\chi E(x',y')dx'dy' \tag{20}$$

传播函数此时要变为成像域 D 向测量域 Γ 的格林函数，这个方程被称为数据方程。不难发现我们得到的数据 E^r 与 E 相关，而 E 本身由一个复杂的方程决定。

这里我们的写法是已经把复杂的修正项写成了局域总场 E 的形式，其实际计算中往往采用玻恩近似这样的方法来进行逐级修正进行计算，如式(21)

$$E = E^i + \int \chi G E^i + \iint \chi G \chi G E^i + ... \tag{21}$$

与我们计算磁场所用的毕奥-萨伐尔定律

$$B = \iiint \frac{\mu_0 \vec{j}(r') \times (r - r')}{4\pi |r - r'|^3} dr'^3 \tag{22}$$

相对比，由于状态方程本身的 E 直接与自己相关，所以这个耦合关系显著地复杂于毕奥-萨伐尔定律，无法简单的利用卷积展开将其解耦。我们不妨尝试一下，对数据方程(20)和状态方程(19)均进行

傅里叶变换，同时规定 $\tilde{x} = Fourier[x]$，则我们得到方程：

$$\begin{cases} \tilde{E} - \tilde{E^i} = k_0^2 \tilde{G_0^D} \widetilde{\chi E} \\ \tilde{E^r} = k_0^2 \tilde{G_0^\Gamma} \widetilde{\chi E} \end{cases} \tag{23}$$

由于 χ、$\vec{E}$ 均未知，而 $\widetilde{\chi \vec{E}} \neq \chi \tilde{\vec{E}}$，因此要想求出 χ，必须从两个方程中解出 $\chi \vec{E}$ 和 $\vec{E}$。求解逆问题时需要对两个算子（G_0^D, G_0^Γ）都进行逆操作。和前一节所说的第三个原因一样，这种逆操作非常容易受噪声的影响，更不用说要进行两次操作。而要想提前知道信号 $\vec{E}, \chi$ 在频率空间分布也并不容易，难以提前进行滤波，这使得求解变得困难。

更一般地来说，逆问题的病态主要是由于正算子的" 过滤" 作用造成的，不同的解经正算子映射之后，其差别就被滤掉了，而在逆运算时又会对其进行放大。具体的实例可见于我们进行噪声优化的部分。此外，实际问题中的数据只能离散、有限的得到，并且还有测量的噪声，这会使得许多常规的数值方法会因为巨大的误差增长而失效。因此在处理这种问题时，常常需要用正则化手段将逆算子用性能更好的算子进行代替和近似，使得一些因正算子过滤、离散化的观测以及噪声污染等因素而丢失的信息得到恢复。

事实上，要处理这一问题，目前要么将非线性问题线性化进行近似处理，然后再不断迭代解，就如同玻恩近似的算法一样进行计算；要么将它转化为优化问题，进行优化计算。两者的计算量都显著的大于了傅里叶变换的算法。

这样对比之下，我们就可以很容易看出我们问题可解的一个重要因素: 我们求解的问题没有探测波激励的过程，而是直接测量了电流激发的磁场，因此就回避了如逆散射问题中这样的复杂耦合，因此可以只使用单逆算子来进行处理，使得问题可解。

5.4 含时修正

最后，为了尝试这一方法在超高频时的可拓展性，我们接着考察了推迟效应的影响。回到磁矢势进行计算，利用:

$$A(x, y, z) = \int G(r - r', t - t') \vec{J}(r', t') \tag{24}$$

$$G = \frac{1}{|\vec{R}|} \delta(\frac{\vec{R}}{c}) \tag{25}$$

同样，对其进行空间与时间的多重傅里叶变换，并利用:

$$\mathcal{F}[B_z] = \mathcal{F}[(\nabla \times A)_z] = \mathcal{F}[\partial_x A_y - \partial_y A_x] = i k_x \mathcal{F}[A_y] - i k_y \mathcal{F}[A_x] \tag{26}$$

因而，我们其实能够不依赖于毕奥-萨伐尔定律重新构建出电流与磁场的方程，（这里没有用到近场近似，可以严格地计算）或者说，毕奥-萨法尔定律其实也是这样构建出来的。

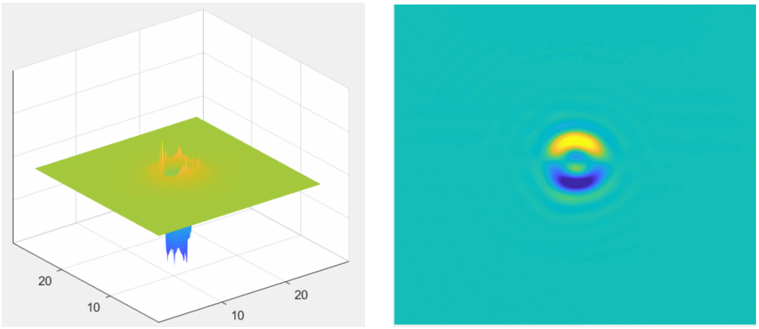
新的频域空间中的格林函数为:

$$g(k_x, k_y, k_0) = \mathcal{F}[G] = \frac{1}{2} \frac{e^{-\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_0^2} z}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_0^2}} \tag{27}$$

其中 $k_0 = \frac{\omega}{c}$。其他的步骤仍与上面一致，同样能够解出:

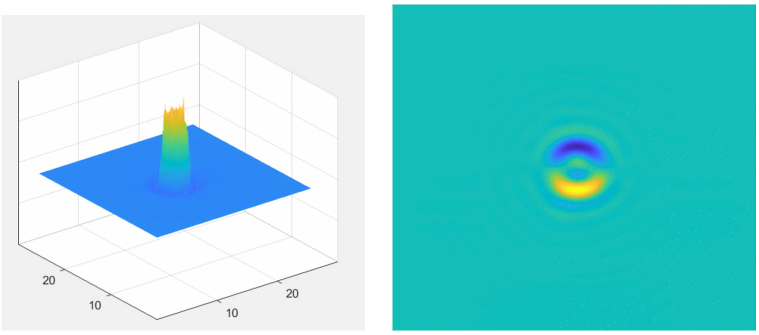
$$b_z(k_0) = i \frac{\mu_0 d}{4\pi} g(k_x, k_y, k_0)[k_x j_y(k_x, k_y, k_0) - k_y j_x(k_x, k_y, k_0)] \tag{28}$$

我们按同样的思路使用模拟验证我们的算法。这次仍然选择一个通电电流圆环，分别在似稳情况和有明显推迟时进行计算。首先来看似稳时的情况。分别在电流正向和反向时截取了运算结果，结果如下图26,27



(a) B_z　　　　(b) J_x

图 26: 电流反向

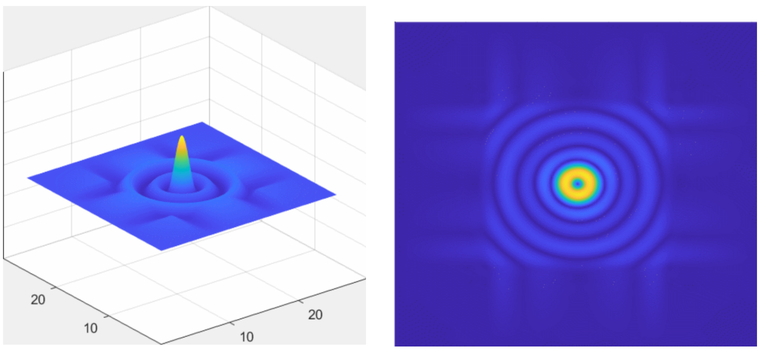


(a) B_z　　　　(b) J_x

图 27: 电流正向

可以看到似稳状态下我们的结果符合得较好。这也不难理解，本质上这里只是差了一个时间的相位因子。

我们在有明显推迟效应的频率下实验，得到的结果如图28所示。



(a) B_z　　　　(b) $|J|$

图 28: 明显推迟下的结果

可以发现，在此时我们虽然同样能够比较好地算出中间电流环上的电流情况，电流的基本特征得以保持。但是与此同时，解得的区域内还有一些值比较小的小电流存在；换而言之，解出的电流背景并不干净。我们猜想这可能是由于在超高频的交变电流作用下，稳恒电流条件或许需要一些修正。

六、　结论

我们利用傅里叶变换的方法实现了从磁场到平面电流的逆求解，并基于模拟和实验数据对方法进行了检验和修正；在进行了修正后，我们的方法表现出了很好的有效性。我们接着研究了各因素对于结果的影响: 采样间隔对应图像的细节，采样范围对应图像的整体形貌，高频噪音会明显地在结果中反应。随后，我们一般性地论证了一个逆问题的可解性，比较了逆散射问题和电流逆问题，由此说明了我们这一问题可解的本质是缺少激励环节。最后，我们将这一方法拓展到了超高频条件，并进行了模拟验证。

七、　小组贡献

在我们小组中，王一飞同学主要负责程序编写和演讲；周晋冬同学主要负责了磁场的模拟、公式的推导以及文章的写作。他们对本研究有同等的贡献。

参考文献

[1] BARTH D S, SUTHERLING W, JEROME ENGLE J, 等. Neuromagnetic Evidence of Spatially Distributed Sources Underlying Epileptiform Spikes in the Human Brain[J]. Science, 1984[2022-01-06].

[2] NOWACK K C, SPANTON E M, BAENNINGER M, 等. Imaging Currents in HgTe Quantum Wells in the Quantum Spin Hall Regime[J]. Nature Materials, 2013, 12(9): 787 - 791. DOI:10.1038/nmat3682.

[3] ROTH B J, SEPULVEDA N G, WIKSWO J P. Using a Magnetometer to Image a Two-dimensional Current Distribution[J]. Journal of Applied Physics, 1989, 65(1): 361 - 372. DOI:10.1063/1.342549.

[4] KOROLEV Y, LATZ Jonas. Inverse Problems Lecture notes [Z/OL] (2020). https://www.damtp.cam.ac.uk/research/cia/files/teaching/Inverse_Problems_2020/LectureNotes2020.pdf

[5] 黄卡玛, 赵翔. 电磁场中的逆问题及应用 [M]. 科学出版社, 2005.

[6] 范启蒙, 尹成友. 高对比度目标的电磁逆散射超分辨成像 [J]. 物理学报, 2018, 67(14):12.