长波散射下介质体内电四极矩的激发

程丰 19307110294

摘要

本文主要研究了在长波散射条件下介质体内电四极散射场的激发。通过分析玻恩近似的物理过程和散射场的积分-微分方程，我们给出了提高电四极散射场强度的两条途径：改变介质体和改变激励源。随后通过分别改变介质体的相对介电常数 ε_r 和位形，我们从理论和模拟两个角度论证了介质体内 $m=0$ 的电四极矩可以比电偶极矩贡献更大的散射截面。最后通过分析激励源的形式对散射场角动量的影响，我们说明了激励源只含 $l=2$ 的角动量项是使均匀介质球电四极散射场占主导的必要条件，并在 Comsol 模拟中观察到这一现象。

关键词: 电四极矩　玻恩近似　多极矩法　Comsol 模拟

1　引言

将一接地均匀电介质球置于匀强电场中，介质球的表面会极化出正负电荷，这部分极化电荷可等效成一偶极子，使得球外空间电势在原有基础上还需再叠加上偶极子的电势。

通过求解球坐标下的介质球内外的 Laplace 方程，

$$\nabla_1^2 = 0,\ \nabla_2^2 = 0$$

再结合介质球表面的边界条件，

$$\begin{aligned} E_1 \to -E_0 r\cos\theta &\quad r\to\infty \\ \varphi_1 = \varphi_2 &\quad r=R \\ \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} &\quad r=R \\ \varphi_2 limited &\quad r=0 \end{aligned}$$

可以得到介质球内外的电势表达式，

$$\begin{aligned} \varphi_1 =& -E_0 r cos\theta + \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}R^3 E_0\frac{1}{r^2}cos\theta \\ \varphi_2 =& -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}E_0 r cos\theta \end{aligned}$$

其中 $\varphi_{dipole}\propto\dfrac{1}{r^2}cos\theta$ 的一项为偶极子贡献的电势，若通过 $-\nabla\varphi=E$ 化为电场，则有

$$\overrightarrow{E_{dipole}} = 4\pi\varepsilon_0\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}R^3\cdot\left(\frac{cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{e_r}+\frac{sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{e_\theta}\right) = \frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)R^3}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}\left(\frac{2cos\theta}{r^3}\overrightarrow{e_r}+\frac{sin\theta}{r^3}\overrightarrow{e_\theta}\right)$$

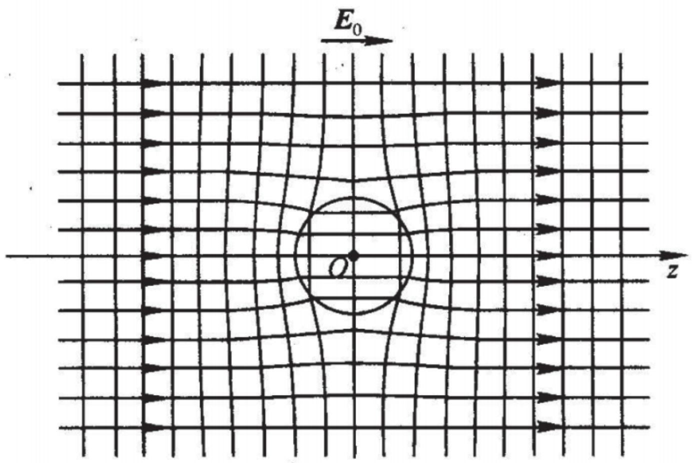

图 1: 接地介质球附近的电场线分布（图片来源：蔡圣善, 朱耘, 徐建军. 电动力学 [M]. 高等教育出版社, 2002. 第 97 页.）

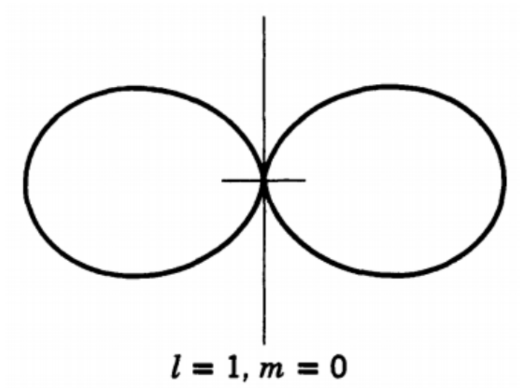

图 2: 偶极辐射的能量角分布（图片来源：Jackson J D 1999 Classical Electrodynamics 3rd edn (New York: Wiley).P438）

偶极子对外辐射电场的能量密度

$$u \propto |\overrightarrow{E}_{dipole}|^2 = \frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2R^6}{(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2r^6}\left(1+3cos^2\theta\right)$$

即 u 只和 θ 有关，我们定义能量密度的角分布函数 $f(\theta,\varphi)$，用于描述在某一实体向外辐射的能量密度是如何随是空间方向而改变的。上例中的 $f(\theta)=1+3\cos^2\theta$ 在 $\theta=0,\pi$ 时取最大值，在 $\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ 时取最小值，这正是偶极辐射的特点。

匀强电场在均匀介质球中激发出电偶极子，这一物理图像我们已非常熟悉。然而，是否有可能在介质体内激发出由高阶 l 主导的，如 $l=2$ 电四极矩的散射能量角分布？为了搞清楚这一点，我们需要借助散射理论。

2 散射问题

2.1 散射的一般描述

在长波极限下 (Long-Wavelength Limit)，由于波长 λ 远大于散射体的尺度 d，散射体附近的场可被视作似稳场，在无源空间中，场近似满足 Laplace 方程，而在 Maxwell 方程组第四条方程中的位移电流项被忽略。对于散射体而言，在某一特定时刻 t 其感受到的场与稳恒电场无异，两种场在散射体中激发出的电荷分布 $\rho(\mathbf{r}')$ 是相同的，因此散射体辐射能量的角分布也是相同的。这是第一部分提出的静电学问题可以用长波极限下的散射理论解决的原因。

对于散射问题，我们先从最简单的标量情形开始考虑。如果有一标量入射波 $\psi(\mathbf{r})$，遇到一个用势能分布 $V(\mathbf{r}')$ 来描述的散射体，则散射体内的波满足以下的亥姆霍兹方程 (Helmholtz Equation):

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi(\mathbf{r}') = V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')$$

由于散射体会散射出新的波，它可以被视作一个“源”，通过该亥姆霍兹方程对应的格林函数，可以描述散射体“源”对入射波的响应，即

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)G(\mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r}')$$

波与源之间满足一积分-微分方程：

$$\psi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'$$

通过傅里叶变换，可以求解格林函数所满足方程，再回带到上述积分表达式中，就可以求出波（入射波 + 散射波，用 $\psi(\mathbf{r})$ 来表征）与散射体（用 $V(\mathbf{r}')$ 来表征）之间满足的积分方程，即

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'$$

其中 $\psi_0(\mathbf{r})$ 描述的是未经散射的“背景”波，其满足自由空间内的亥姆霍兹方程：

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi_0 = 0$$

观察这一积分表达式，我们发现散射体外的波 $\psi(\mathbf{r})$ 不仅和 $V(\mathbf{r}')$ 有关，而且还和散射体内的波 $\psi(\mathbf{r}')$ 有关。也就是说，入射波感受到的不是一个单纯的散射体带来的势，而是散射体与内部波相互作用造成的势。换句话说，$V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')$ 表征的是一个加强的源。而散射体内部的波又来源于从散射体外部入射的波。因此，我们最终看到的散射体外的波，其形成实际上经历了复杂的相互耦合过程：

1. 入射波作用在散射体上，使散射体中的介质分子以相同频率振动，从而辐射出相同频率的波；
2. 这一部分散射波接下来起了两个作用：第一，叠加在散射体外的入射波上，构成散射波对入射波的一阶修正；第二，散射波与散射体内的入射波叠加，再次作用在散射体上，使散射体再次发射出新一轮的散射波，这部分散射波同样起了两个作用：构成对入射波的二阶修正和引发新一轮的散射波。
3. 以此类推，散射波对入射波的修正实际上是有无穷阶，但这一系列修正过程几乎是在一瞬间完成的，而最终在散射体外看到的波，就是背景波加上无穷阶修正波的结果。

因此，改变散射场（包括振幅、角分布）有两种方法：改变散射体（等价于改变 $V(\mathbf{r}')$）或者改变激励源（等价于改变 $\psi_0(\mathbf{r})$），本文接下来的部分就将讨论如何通过这两种方法，使散射波出现电四极子的能量角分布，但在此之前首先需要掌握与这套物理图像配套的数学工具。在数学上确实也存在一种通过由散射波的零阶求一阶，一阶求二阶...... 的方法，这就是著名的玻恩近似。

2.2 玻恩近似

如果记 $g=\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$（此即点电荷的格林函数），标量波 ψ 与散射势 V 之间满足的关系写作

$$\psi=\psi_0+\int gV\psi$$

将等式左侧中的 ψ 代入等式右侧的积分中，可以得到

$$\psi=\psi_0+\int gV\psi_0+\int\int gVgV\psi$$

$\int gV\psi_0$ 正是散射体对入射波的一阶修正，如果只保留到这一项，就称为一阶玻恩近似。再次进行相同的代入操作，反复地用已知的背景入射波 ψ_0 与 V 的相互作用修正出射波，就得到二阶、三阶乃至更高阶玻恩近似的结果。

$$\psi=\psi_0+\int gV\psi_0+\int\int gVgV\psi_0+\int\int\int gVgVgV\psi_0+\cdots$$

通常而言，一阶修正是占主导的，而更高阶修正都可以忽略。

分析清楚了标量波情形下对散射问题的物理描述，和玻恩近似这一计算散射波的数学方法，现在给出矢量波情形下描述散射问题的一般表达式，其无非是加上了偏振和更复杂的数学。

对于电磁波在宏观物体上的散射问题，散射体外总电场满足如下的积分方程

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\mathbf{E_0}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int\frac{\chi(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}')e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}}{\mathbf{R}}d\tau'$$

其中 $\mathbf{k}$ 为入射波波矢，$\mathbf{r}$、$\mathbf{r}'$ 分别为坐标原点、散射中心（即受入射场激励而振荡的分子所处位置）到空间中某一点的矢量，$\mathbf{R}=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$，$\chi(\mathbf{r}')$ 为散射体在 $\mathbf{r}'$ 处的的极化率。由于 $\varepsilon_r(\mathbf{r}')=(1+\chi(\mathbf{r}'))\varepsilon_0$，可以看出在电动力学中的 $\varepsilon_r(\mathbf{r}')$，就是量子力学中散射体势函数 $V(\mathbf{r}')$ 的对应。

在远场条件下（$r\gg d$），一阶玻恩近似下散射体外散射场的表达式为

$$\mathbf{E}^{(1)}=\frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\mathbf{E_0}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r}\int e^{i(\mathbf{k}-k\mathbf{e_r})\cdot\mathbf{r}'}d\tau'$$

其中 $\mathbf{e_r}=\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ 为从原点指向观测点的单位矢量。

微分散射截面 $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$ 是用于描述散射能量角分布物理量，其与入射、散射波振幅的关系为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{r^2|\epsilon^*\cdot\mathbf{E_{sc}}|^2}{|\epsilon_{\mathbf{0}}^*\cdot\mathbf{E_{inc}}|^2}$$

其中 $\mathbf{E_{inc}}$、$\mathbf{E_{sc}}$ 分别为入射波、散射波的电场分量，$\epsilon_\mathbf{0}$、ϵ 分别沿入射波、散射波偏振方向的单位矢量。在一阶玻恩近似下，$|\mathbf{E_{inc}}| = |\mathbf{E_{sc}}|$，因此 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ 完全由偏振方向决定。

假设入射波沿 z 方向传播，不妨先设电场分量沿 x 方向，则 $\mathbf{E_{inc}} = E_0\overrightarrow{e_x}$，$|\epsilon_\mathbf{0}^* \cdot \mathbf{E_{inc}}|$ 没有角向分布，$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ 的角向分布完全由 $|\epsilon^* \cdot \mathbf{E_{sc}}|$ 贡献。

在长波极限下（$kd \gg 1$），$\mathbf{E}^{(1)}$ 中的积分部分对角分布不起作用，只影响电场的模，角分布只依赖于两个 ∇ 做旋度的部分。又由于 ∇ 只作用在 r 上，因此，两个旋度运算可以独立于对散射体的积分先行计算。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_\mathbf{sc}^{(1)} \propto \nabla\times\nabla\times\mathbf{E_0}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} &= k^2[\mathbf{e_r}\times(\mathbf{E_0}\times\mathbf{e_r})]\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} \\
&= E_0\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r}\left[\left(cos^2\theta + sin^2\theta sin^2\phi\right)\overrightarrow{e_x} - sin^2\theta cos\phi sin\phi\overrightarrow{e_y} - sin\theta cos\theta cos\phi\overrightarrow{e_z}\right]
\end{aligned}
$$

如果认为入射波是非偏振波，即在任意 ϕ 方向上的电磁波强度都是相同的，通过计算 $|\mathbf{E_{sc}}|^2$ 后对 ϕ 取平均，得到

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{2}\left(1 + cos^2\theta\right)
$$

这正是偶极子辐射能量的角分布函数。这实际上也说明了在一阶波恩近似下，只可能给出散射体对入射场的偶极响应，也就是说，现在只考虑散射体作为一个整体对入射场的响应，而不考虑散射体的细节（如形状、是否均匀）对散射造成的影响。

同样，我们也可以得到二阶玻恩近似下的散射场

$$
\mathbf{E}_{sc}^{(2)} = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\nabla\times\nabla\times\mathbf{E_0}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r}\int\left(\nabla\times\nabla\times\mathbf{E_0}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0}}{r}\int\frac{e^{i\mathbf{k}\left(\overrightarrow{r_0}-\overrightarrow{r_1}\right)}}{|\overrightarrow{r_0}-\overrightarrow{\mathbf{r_1}}|}d^3\mathbf{r_1}\right)\frac{e^{i\mathbf{k}\left(\mathbf{r}-\overrightarrow{r_0}\right)}}{|\mathbf{r}-\overrightarrow{\mathbf{r_0}}|}d^3\mathbf{r_0}\right)
$$

还是考虑远场散射，决定散射角分布的是下面这一项

$$
\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times(\mathbf{E_0}\times\mathbf{e_r}))\times\mathbf{e_r}
$$

经过复杂叉乘计算后，可以得到

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \left\{a_1\left[\frac{1}{2}\left(1 + cos^2\theta\right)\right] + a_2\left[cos^4\theta + \frac{65}{4}sin^4\theta + \frac{3}{2}cos^2\theta sin^2\theta\right]\right\}^2
$$

其中 $cos^2\theta sin^2\theta$ 正是四极子辐射 (Quadruople Radiation) 对散射场的贡献。因此，只有通过二阶玻恩近似，我们才能看到散射问题中如四极子这样更为精细结构的激发导致的辐射。

3 改变散射体

3.1 改变相对介电常数 ε_r

考虑一个介质球对平面波的散射问题，我们现在希望使散射波中 $l = 2$ 这一项占主导，也就是辐射能量的角分布应呈现出四极子图案。均匀介质球的 $l = n$ 阶散射场振幅

$$|E^{(n)}| = \left(\frac{\omega^4 R^6(\varepsilon_r - 1)^2}{18c^4}\right)^{\frac{n}{2}}$$

对于一般的介质，$\varepsilon_r - 1 \ll 0$，因此高阶项的振幅呈指数衰减，$l = 2$ 的贡献被完全掩盖在了 $l = 1$ 这一项的贡献中。重新看一下散射场的积分方程，如果有办法让 $l = 1$ 项消失，那么 $l = 2$ 这一项就可以占主导了。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E_0}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int\frac{\chi(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}')e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}}{\mathbf{R}}d\tau'$$

以 $\mathbf{q} = \mathbf{k} - k\mathbf{e_r}$ 为极轴，在球坐标系中一阶玻恩近似给出的散射场为

$$\mathbf{E}_{sc}^{(1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\times\nabla\times\mathbf{E_0}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_{sphere}}\varepsilon_r(\mathbf{r}')e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'}r'^2dr'sin\theta'd\theta'd\phi'$$

现在想办法让这一积分等于 0，显然如果 $\varepsilon_r(\mathbf{r}')$ 在散射体内的平均值不等于 0，积分是不可能等于 0 的，因此该介质必须有一部分区域 ϵ_r 为负。一个想法是让 $\varepsilon_r(\mathbf{r}')$ 携带有一 θ 的三角函数，首先尝试令 $\varepsilon_r(\theta') = cos\theta'$，$\int_0^{\pi} cos\theta' sin\theta' d\theta' = 0$，$l = 1$ 的项就被消去了。

然而，如果这时用 Comsol 模拟，将不会出现我们所希望的四极子图案，这是因为 $l = 2$ 的项被一同消去了，$l = 2$ 的积分中含 θ 的项写做

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi} cos\theta' sin\theta' \int_0 cos(\theta'' - \theta')sin(\theta'' - \theta')d\theta'' d\theta' \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} cos\theta' sin^3\theta' d\theta' \\ &= 0\end{aligned}$$

上面的积分等于 0 的关键原因是存在 $cos\theta'$ 这一项，而积分区间为 0 到 π。$sin\theta'$ 的任意次幂在 0 到 π 的积分永远恒大于 0，如果我们让对的积分中含有的是 $cos\theta'$ 的偶数次幂，就可以使积分不为 0，而为了在凑出一个 $cos\theta'$，一个恰当的选择就是让 $\varepsilon_r(\theta')$ 再补上一个 $sin\theta'$。

可以证明，当 $\varepsilon_r(\theta') = cos\theta' sin\theta'$ 时，$l = 2$ 的积分中含 θ 的项等于 $\frac{\pi}{8}$，而 $l = 1$ 的积分仍为 0.Comsol 模拟显示了同样的结果（见图3），当 $\varepsilon_r(\theta') = cos\theta' sin\theta'$ 时，体系散射出四极子的场的量级远大于偶极子场的量级。

3.2 改变散射体位形

现在回到散射场的积分方程，显然除了改变 ε_r 的角分布使介质成为非均匀的，还可以通过改变一均匀介质的形状（也就是 $d\tau'$），使 $l = 2$ 的散射项增大。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E_0}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int\frac{\chi(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}')e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}}{\mathbf{R}}d\tau'$$

有了改变 ε_r 时消去 $l = 1$ 项的分析，现在我们清楚地知道对于一均匀介质体，$l = 1$ 项一定存在并且占主导（因为积分项一定不为 0）。因此接下来需要做的是，在 $l = 1$ 项不变的前提下，探索使 $l = 2$ 项增大的方法。

首先还是尝试一个相对对称的位型，即一个均匀介质正方体，入射电磁波波矢垂直于正方体的表面。为了使其余均匀介质球情形 $l = 1$ 项散射的贡献相同，正方体需要与球等体积。这显示在 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 的

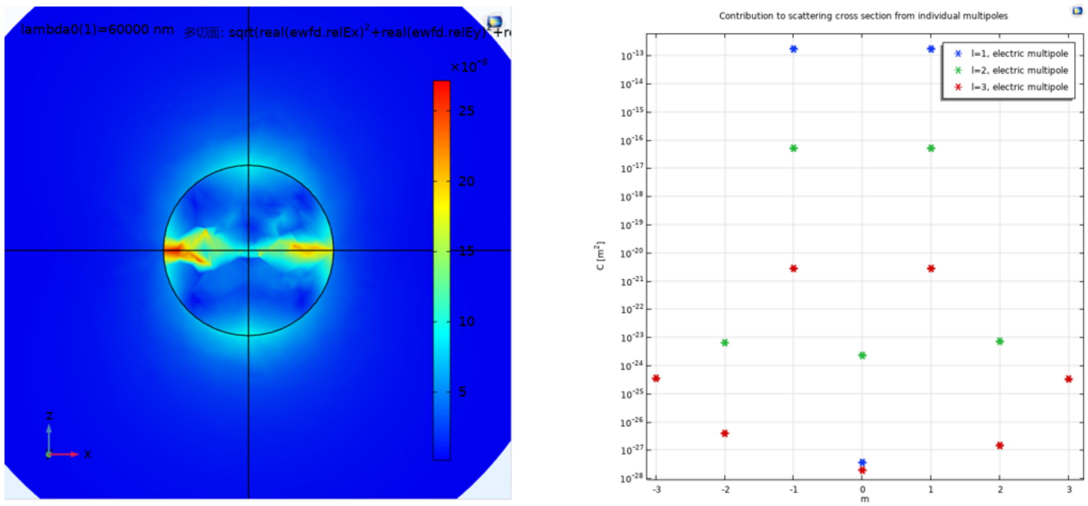

图 3: 改变散射体介电常数的情形：左图为 xOz 平面上的散射场模分布，右图为阶数为 (l,m) 的电多极矩对总散射截面的贡献

```
In[43]:= d = 1/2; b = 0;
         NIntegrate[1/√((x - x0)^2 + (y - y0)^2 + (z - z0)^2), {x0, -d, d}, {y0, -d, d},
          {z0, -d, d}, {x, -d, d}, {y, -d, d}, {z, -d, d}, Method → "AdaptiveMonteCarlo"]
Out[44]= 1.84944

In[45]:= N[32/15*Pi^2*(3/(4*Pi))^(5/3)]
Out[45]= 1.93439
```

图 4: 二阶玻恩近似给出的散射场修正，其中上面的积分对应于正方体，下面的积分对应于球

积分项中：$\chi(\mathbf{r}')\,\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ 在积分区域内都是常数，因此积分值只和积分区域的大小有关。这其实进一步说明了，在一阶玻恩近似下入射场是“看不到/感知不到”散射体的具体位形的，因此激发的散射场一定是偶极状的。

现在考虑球和正方体 $l=2$ 项的散射贡献。在上一种情形中，只是定性地判断了 $l=2$ 项有贡献，没把积分具体算出来，但现在我们不得不计算下面这个积分在球和正方体中的结果了：

正方体 $|E^{(2)}|$ 的数值小于球体的，看上去似乎有违直觉：对于一个对称性更弱的介质体，其对于高阶 l 项的响应应该更强。事实上，由于两个积分中被积函数都是 $\dfrac{1}{r}$，而积分区域的体积相同，对于积分区域中的某一子区域，其离原点越远贡献的积分值就越小。对于正方体的积分，在其顶点附近的积分值显然小于在球表面（同样为积分的最外侧区间）积分值，而这一部分积分值的差无法弥补在各面中心附近大于球表面对应区域的积分值。我们可以想象将一个球和一个正方体逐渐放大，直至其体积达到预设的体积值，只有球这种高度对称的体系，通过“均匀”的方式“稳健地”向外拓宽积分区域，才能在一定的积分区间内“收获”最大的积分值。

回到正题，事实上比较 $|E^{(2)}|$ 的大小并不是衡量介质中激发电四极矩成分的正确标准。如先前两个旋度项给出的能量角分布所示，$|E^{(2)}|$ 并不仅仅代表的是电四极子贡献的场。正确的处理方法应该是

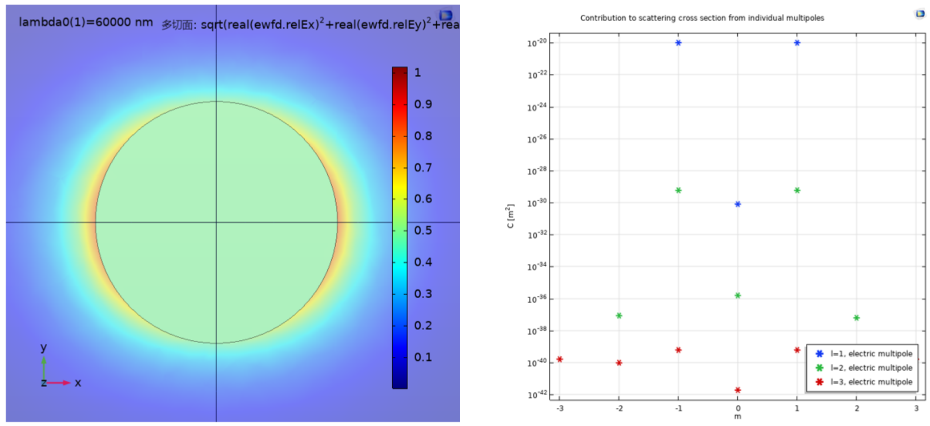

图 5: 均匀介质球在 xOz 平面上的散射场模与各阶电多极矩对总散射截面的贡献

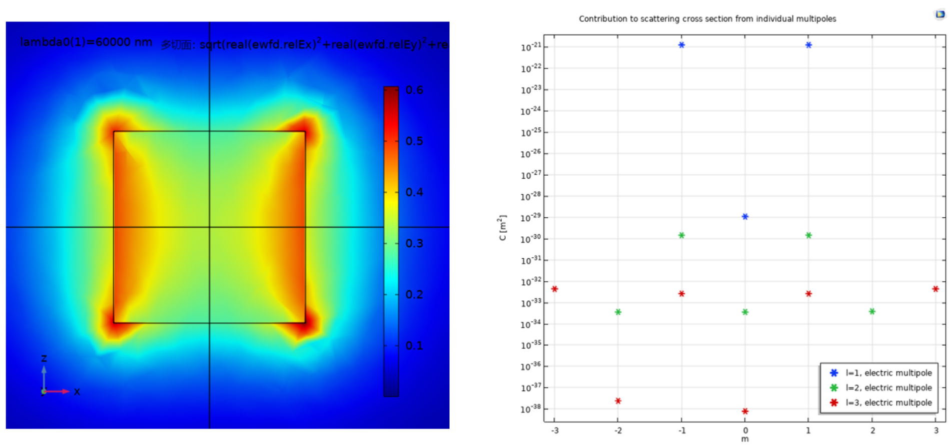

图 6: 均匀介质正方体在 xOz 平面上的散射场模分布与各阶电多极矩对总散射截面的贡献

比较正方体和球 $l=2$ 和 $l=1$ 阶电多极矩对总散射截面的贡献之比。我们并不打算在此展开对散射系数过多定量的讨论，因为这将在“改变激励源”一章中完成，只需要说清楚三点即可：

1. 阶数为 (l,m) 的多极矩对总散射截面的贡献不仅取决于其辐射场的大小，还取决于辐射场的角分布；
2. 电磁多极矩场作为电磁场一组完备基的保证了对散射场一定可以做多极矩展开；
3. 对于阶数为 (l,m) 的多极矩，其贡献的散射截面为 $\sigma(l,m)=\dfrac{\pi}{2k^2}(2l+1)|\beta(l,m)|^2$，其中 $\beta(l,m)$ 称为 l 阶多极矩的散射系数，其大小与介质体内激发出 l 阶多极矩的幅值直接相关。

Comsol 模拟结果显示，对于一均匀介质球（见图5），$l=2$ 和 $l=1$ 阶电多极矩贡献的散射截面之比 $\dfrac{\sigma(2,0)}{\sigma(1,0)}\approx 10^{-6}$，而对于一均匀介质正方体（见图6），$\dfrac{\sigma(2,0)}{\sigma(1,0)}\approx 10^{-4.5}$. 因此，正方体内被激发出了更强的电四极矩。

我们当然还可以把介质体的形状改得更“奇形怪状”一些，使 $\dfrac{\sigma(2)}{\sigma(1)}$ 进一步增大，但有了“改变介电常数”一节的分析，可以认识到对于一均匀介质体，$l=1$ 阶的贡献是无法抹除的（并且很大）。似乎

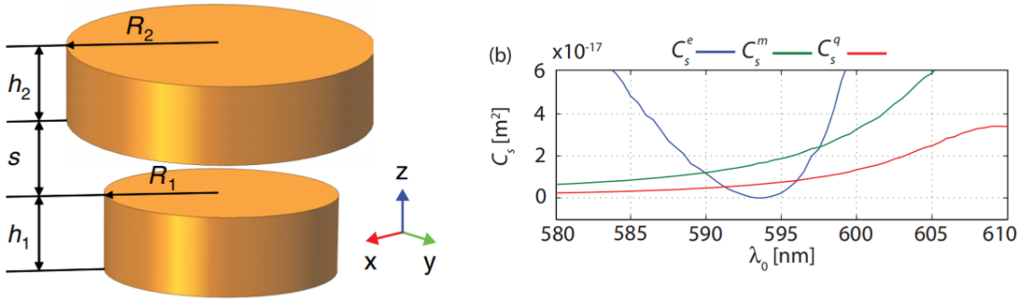

图 7: 对外几乎不显电偶极散射的一种结构，参见 Grahn P, Shevchenko A and Kaivola M 2012 Phys. Rev. B 86 035419

没有办法像通过改变常数一样把 $l=1$ 阶的贡献完全消掉，但如果放宽一点限制，考虑两个靠得很近的介质体对外产生的总场贡献，就有可能实现电四极矩占主导的散射。

如图7所示，两个正对的相距$s=10nm$的圆柱形介质体，其高度均为$h=10nm$，半径分别为$R_1=15nm$，$R_2=20nm$,若入射电磁波的偏振方向沿 z 轴，图7显示则在特定的波长$\lambda\approx 594nm$时，两圆柱体构成的整体激发出电偶极矩的散射截面比电四极矩的散射截面小，从而实现了电四极矩主导电多极辐射。

为什么两个分立圆柱体构成的结构可以对外不显现电偶极矩？这是因为入射电磁波在两圆盘上均激发出一电偶极矩，而从准静近似的观点，由于小圆柱的上表面（以图中的“上”“下”方位为准）与大圆柱的下表面极化出电荷的极性相反，在两圆柱中间的区域也可以认为有一等效电偶极子，且其方向与两圆柱内部的电偶极子方向相反。当中间区域与两圆柱内偶极子之和为 0 时，对外就不表现偶极辐射了。因此，既然匀强似稳场下均匀介质内一定会激发出沿电场方向的电偶极子，消除偶极辐射的关键是介质必须能够还能额外激发出一方向相反的偶极子，也就是内部必须有电荷积累，而这一点不通过分割均匀介质无法实现。

4 改变激励源

我们已经完成了改变散射体情形下如何激发 $l=2$ 散射场分布的讨论，下面仍然围绕激发 $l=2$ 的散射场展开，只是现在选择改变的是激励源，而散射体始终是一均匀的介质球。在开始之前，我们再次回顾一遍散射场产生的过程，以建立改变激励源情形下的一般图像：激励源与散射体作用，形成一阶散射场，背景场与一阶散射场的叠加再次作用于散射源，形成二阶散射场，以此类推。但在前一节中没有指明是什么样的物理机制导致了散射场。散射场是由于介质内部分子所携带的电荷在电磁力的作用下，以入射电磁波的频率作受迫振动辐射出的电磁波。电荷把入射电磁波的能量散射到其他方向上去，其运动必然导致传导电流，而介质体内电场对时间的一阶导数则形成了**位移电流**。这两部分电流之和可视作散射场的源。尽管在似稳条件下（近场、低频），通常忽略位移电流的贡献，但作为最严格情形的讨论，我们仍然将位移电流纳入考虑，并将散射场的源电流记做$J_{sca}(r)$，并将介质体内传导电流和位移电流之和称为散射电流。$J_{sca}(r)$与介质体内总电场$E(r)$的关系为

$$\mathbf{J}_{\text{sca}}(\mathbf{r})=-i\omega[\varepsilon(\mathbf{r})-\varepsilon_h]\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

“散射问题”一节指明了介质体内的总电场与介质体外的散射场 $E_{sc}(r)$ 通过散射场的积分-微分方程联系，接下来要说明的是，$E_{sc}(r)$ 与 $\mathbf{J}_{\mathbf{sca}}(\mathbf{r})$ 之间可以直接通过多极矩展开联系。因此理论上来说，如果我们已知希望获得的散射场 $E_{sc}(r)$ 的数学形式，就可以反推回散射电流 $\mathbf{J}_{\mathbf{sca}}(\mathbf{r})$ 的形式。这时只需要再加上总场与入射、散射场的关系 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{in}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{sc}(\mathbf{r})$，结合边界条件反复迭代，就可以推导出入射场 $\mathbf{E}_{in}(r)$ 的形式。

显然，这其中将涉及到复杂的数学，在进行这一“逆向操作”之前，我们先来考虑能否对一列平面波进行一些操作，使得一均匀介质球能激发出占主导的电四极子辐射。

4.1 平面波激励

对于无源空间中时间因子为 $e^{-i\omega t}$ 的电磁波，其电磁场分量可以做多极矩展开：

$$H = \sum_{l.m} \left[a_E(l,m) f_l(kr) \mathbf{X}_{lm} - \frac{i}{k} a_M(l,m) \nabla \times g_l(kr) \mathbf{X}_{lm} \right]$$
$$E = Z_0 \sum_{l.m} \left[\frac{i}{k} a_E(l,m) \nabla \times f_l(kr) \mathbf{X}_{lm} + a_M(l,m) g_l(kr) \mathbf{X}_{lm} \right]$$

其中 $f_l(kr)$、$g_l(kr)$ 均为第 1 2 类 Hankel 函数的叠加 $A_l^{(1)} h_l^{(1)}(kr) + A_l^{(2)} h_l^{(2)}(kr)$, $\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{L} Y_{lm}(\theta,\phi) = \frac{1}{i\sqrt{l(l+1)}} (\mathbf{r} \times \nabla) Y_{lm}(\theta,\phi)$ 为归一化的球谐函数，$a_E(l,m)$ $a_M(l,m)$ 分别为阶数 (l,m) 的电、磁多极矩系数。

若该电磁波为平面波，则 $f_l(kr)$、$g_l(kr)$ 均可用第一类球 Bessel 函数 $j_l(kr)$ 替代。进一步地，如果入射光是线偏振的，即 $E_{in}(x) = E_0 e^{ikz}$，利用球谐函数的正交性归一性，可以通过积分求出电、磁多极矩系数的具体表达式

$$a_M(l,m) = i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \delta_{m,0}$$
$$a_E(l,m) = i a_M(l,m)$$

显然对一线偏振光而言，只有 $m = 0$ 时多极矩系数才不为 0，即其不含有 $m \neq 0$ 的多极矩分量。

以下只讨论电磁波的电场，代入平面波的表达式得到

$$\mathbf{E_{in}}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[j_l(kr) \mathbf{X_{l,0}} + \frac{1}{k} \nabla \times j_l(kr) \mathbf{X_{l,0}} \right]$$

散射场的表达式仅仅是在入射场的基础上多乘了两个散射系数，并由于散射场在无穷远处为球面波，将 $j_l(kr)$ 改写为第一类 Hankel 函数 $h_l^{(1)}(kr)$。

$$\mathbf{E_{sc}}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[a(l) h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X_{l,0}} + \frac{\beta(l)}{k} \nabla \times h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X_{l,0}} \right]$$

其中 $a(l)$、$\beta(l)$ 分别为磁多极、电多极矩散射系数，通过其导出的散射截面可衡量散射场中所含第 l 阶多极矩的成分，我们只考虑 $\beta(l)$。

一般而言，多极系数需要通过求解介质体内外的 Maxwell 方程组，并匹配介质表面边界条件得到，但对于一均匀介质球，其边界条件可用一包含本征阻抗 Z_s、电场强度、磁感应强度的关系式给出

$$\mathbf{E}_{tan} = Z_s \mathbf{n} \times \mathbf{B} / \mu_0$$

其中 $\mathbf{E}_{tan}$ 为介质球表面电场强度的切向分量，由此可以求得长波极限 $(ka \ll 1)$ 条件下的第 l 阶电多极系数

$$\beta(l) \approx \frac{2i(ka)^{2l+1}}{(2l+1)[(2l-1)]!!^2}\left[\frac{ka - i(l+1)Z_s/Z_0}{ka + ilZ_s/Z_0}\right]$$

其对应的散射截面

$$\sigma_{sc}(l\ 0) = \frac{\pi}{2k^2}(2l+1)|\beta(l)|^2 = \frac{\pi(ka)^{4l+2}}{2k^2(2l+1)[(2l-1)]!!^4}\left\{\frac{(ka)^2 + [(l+1)Z_s/Z_0]^2}{(ka)^2 + (lZ_s/Z_0)^2}\right\}$$

可见，散射截面随 l 的增大呈幂次衰减，即使通过改变介质球的介电常数，即等价于改变 Z_s，也无法改变散射系数幂次衰减的趋势（$Z_s \to 0$ 和 $Z_s \to \infty$ 时，{} 中的一项均趋于 1）。而平面波中各阶 $a_E(l)$ 已由瑞利公式给出的结果锁定，唯一有可能改变的只有平面波的偏振态，但改变偏振态仅仅是引入 $m \neq 0$ 的多极矩系数项，对于 l 的变化规律毫无影响。因此，我们得出结论：

在长波极限下，平面波无论如何无法使均匀介质球产生由高 l 项电多极子主导的辐射分布。

4.2 电偶极激励

在上一节最终的得出的结论中含有“长波极限”“平面波”“均匀介质球”这三个限制条件，从改变激励源的角度，确实可以打破长波极限这一限制，这时 $\beta(l)$ 将不能再用 4.1 节给出的式子表示，对于短波极限的情形，$\beta(l)$ 不再呈现幂次衰减规律，使得高 l 项具有占主导的可能。本文不讨论这种情况，而将考虑如何改造“平面波”这一条件，遵循“改变散射体”一节中同样的思路，既然当 $l=1$ 和 $l=2$ 项共存时，$l=1$ 项一定会压制 $l=2$ 项的散射贡献，唯一的选择就是想办法把 $l=1$ 项消去。显然，平面波这种混杂有从 $l=1$ 到 ∞ 各种角动量的激励源是一个很差的选择，如果使激励源中只含有 $l=2$ 项，由于均匀介质球的散射场仅仅是在各阶入射场上再乘一个散射系数，因此散射场也应只含有 $l=2$ 项。

我们还可以从另外两个角度理解均匀介质球的散射场没有 $l' \neq l$ 的角动量项。首先，介质球对入射场的作用是沿径向的，因此只会改变角动量的方向，不会改变其大小。形象地说，介质球对入射场从侧面“踢”了一脚。其次，如果观察联系入射场、散射电流、散射场的两条方程：

$$\mathbf{J}_{\mathbf{sca}}(\mathbf{r}) = -i\omega[\varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon_h]\mathbf{E}(\mathbf{r})$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{in}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{sc}(\mathbf{r})$$

记入射场、散射场的角动量分别为 l、l'。假设 $E_{in}(r)$ 只有单独的 l 项，如果 $\mathbf{J}_{\mathbf{sca}}(\mathbf{r})$ 中含有 $l' \neq l$ 项，那么总场 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 中也含有 $l' \neq l$ 项，反映在第二条方程中则是 $\mathbf{E}_{sc}(\mathbf{r})$ 中也含有 $l' \neq l$ 项，通过对 $\mathbf{E}_{in}(\mathbf{r})$、$\mathbf{E}_{sc}(\mathbf{r})$、$\mathbf{J}_{\mathbf{sca}}(\mathbf{r})$ 作多极矩展开并匹配其前面的系数，总有可能使两条方程达到自洽。这正是改变散射体情形。具体来说，散射场 $\mathbf{E}_{\mathbf{s}}(\mathbf{r})$ 与散射电流 $\mathbf{J}_{\mathbf{sca}}(\mathbf{r})$ 满足一通过散射系数 $\alpha(l,m)$, $\beta(l,m)$ 相联系的数学关系：

$$\mathbf{E}_{\mathbf{S}}(r,\theta,\phi) = E_0 \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} i^l[\pi(2l+1)]^{1/2}\left\{\frac{1}{k}\beta(l,m)\nabla\times\left[h_l^{(1)}(kr)\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)\right] + \alpha(l,m)h_l^{(1)}(kr)\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)\right\}$$

$$\alpha(l,m) = \frac{(-i)^{l-1}k\eta}{E_0[\pi(2l+1)l(l+1)]^{1/2}}\int Y_{lm}^*(\theta,\phi)j_l(kr)\mathbf{r}\cdot[\nabla\times\mathbf{J}_{\mathbf{sca}}(r)]d^3\mathbf{r}$$

$$\beta(l,m) = \frac{(-i)^{l-1}k^2\eta}{E_0[\pi(2l+1)l(l+1)]^{1/2}}\int Y_{lm}^*(\theta,\phi)j_l(kr)\times\left\{k^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{J}_{\mathbf{sca}}(r) + \left(2 + r\frac{d}{dr}\right)[\nabla\cdot\mathbf{J}_{\mathbf{sca}}(r)]\right\}d^3\mathbf{r}$$

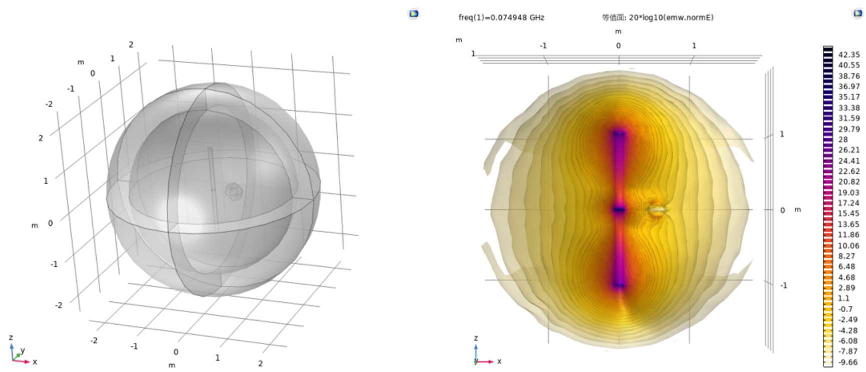

图 8: 偶极天线。左图显示了偶极天线与介质球的相对位置，右图为偶极天线在 xOz 平面上的功率等值面图

处理如此复杂的方程是困难的。事实上，如果 $\mathbf{J}_{\mathbf{sca}}(\mathbf{r})$ 中也只有 l 项，那么 $\mathbf{E}_{sc}(\mathbf{r})$ 中也只有 l 项，在这种情形下方程组仍然有可能在恰当的系数匹配下成立，即 $\mathbf{J}_{\mathbf{sca}}(\mathbf{r}) = \xi_1 \mathbf{E}_{in}(\mathbf{r}) = \xi_2 \mathbf{E}_{sc}(\mathbf{r})$ 为方程组的一组解。为了使 $\mathbf{J}_{\mathbf{sca}}(\mathbf{r})$ 不含有 $l' \neq l$ 项，散射电流的空间分布必须完整地复制入射场的空间分布特性，更进一步说，是复制产生入射场的源（同样可视作随时间振荡的电流）的位形，散射电流可视作入射场源在介质体内的映像。若介质体的形状不规则，其势必“挤压”该映像，而形变的部分必须由其他 l' 项的散射电流来描述。如果形变没有任何对称性，其显然需要通过无穷多阶l'项的散射电流叠加才能描述。反过来说，如果介质体是高度对称的介质球，它将能够完整地将入射场源的位形投影到其散射电流的位形中，而只产生与入射场具有相同l项的散射场。

有了这一判断，应该用仅含有 $l = 2$ 项的源在均匀介质球表面产生电四极状的散射场。但我们暂时还不清楚 $l = 2$ 项的源具有什么位形。在解决这一问题之前，我们先使用由偶极天线近似产生的 $l = 1$ 项源验证上述判断的正确性。

在 Comsol 中绘制一中心位于原点，高度为 $d = 2d_{antenna} + d_{gap} = 2m + 0.01m = 2.01m$，半径为 $r_{antenna} = 0.05m$ 的分层圆柱体作为偶极天线，其中层厚度为 $d_{antenna}$，为了使天线中分布有随时间振荡的电流，需要使用“电磁波，频域 (emw)”模块，并添加“集总端口”提供激励。集中端口的域选择圆柱体中高度为 d_{gap} 的中间层。设置集总端口的源类型为电压，大小 $V_0 = 1V$，高度、宽度分别为 d_{gap}、$2\pi r_{antenna}$，端子间方向沿天线臂。再在“电磁波，频域”模块添加“阻抗边界条件”，选中偶极天线包含的所有域，即可完成偶极天线的绘制（见图8）。

图9显示了在包含偶极天线的一定空间内（边界设置为完美匹配层），电场模的等值面图。在距离偶极天线 $l = 0.5m$ 的位置放置有一半径为 $r = 0.1m$ 的电介质球，其球心与天线中心的连线与天线垂直，电介质球附近出现了明显的偶极辐射图案，偶极辐射的极大值方向与电场偏振方向相同。散射截面的计算结果显示$|\dfrac{\sigma(1,\ 0)}{\sigma(2,\ 0)}|^2 \approx 10$，说明确实产生了占主导的电偶极辐射。

注意当前介质球与偶极天线的距离$l = 0.5m$与偶极天线的尺寸$d = 2.01m$同量级，这是导致沿天线垂直方向电场模不对称的原因。如果将介质球沿移动得足够远（$l \approx 10d$），且保持其与天线的夹角不变，则沿天线垂直方向两侧的辐射强度已基本相同（见图10），这接近于远场散射的结果。事实上，在足够远的区域，入射场已可视作平面波。

可能引起疑惑的是，平面波意味着场携带有从$l = 1$到∞的所有角动量，但偶极辐射只包含$l = 1$的

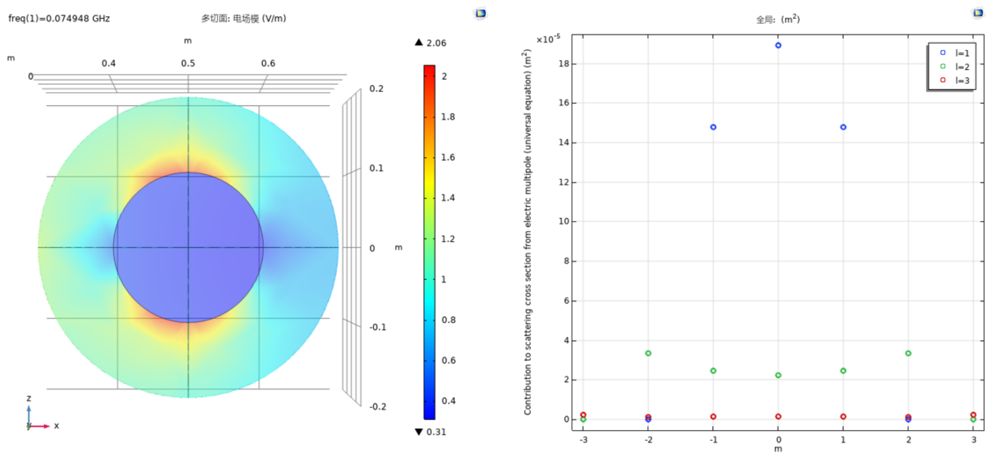

图 9: 处于电偶极辐射场中的均匀介质球。左图显示了介质球附近的电场模，右图显示了各阶电多极矩对散射截面的贡献

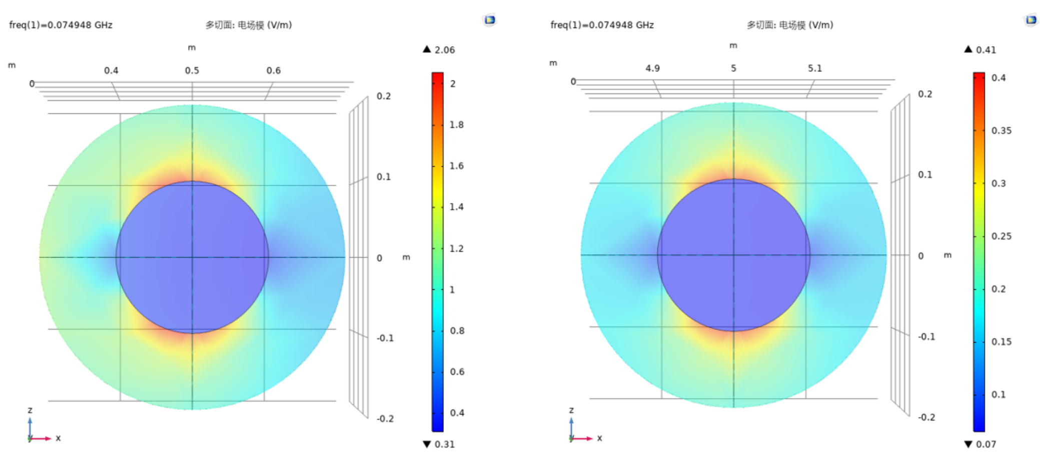

图 10: 介质球的散射场。两图分别为近场、远场散射下的结果

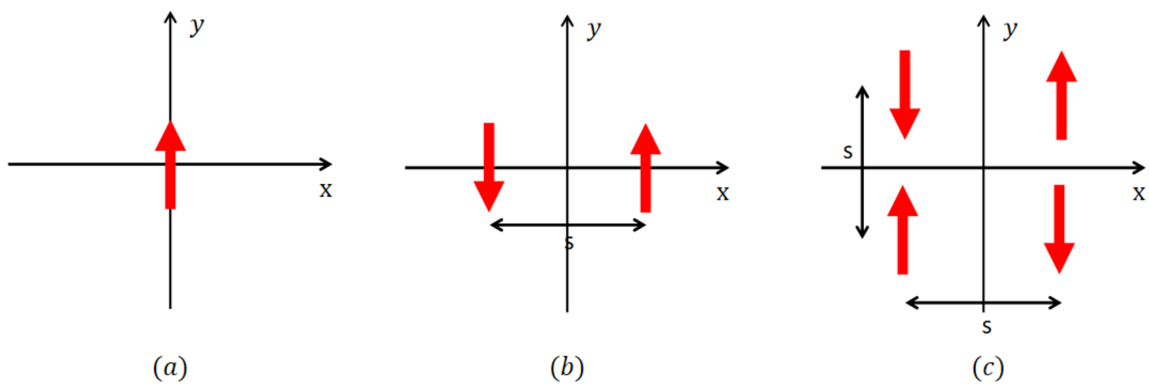

图 11: 坐标算符 $\zeta(\hat{u})$ 作用于电流元的结果。从左到右三张图分别为 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$、$\mathbf{J}_x(\mathbf{r})$、$\mathbf{J}_{yx}(\mathbf{r})$ 的电流位形

角动量。事实上，我们所说的“只包含$l=1$”是对整个偶极辐射场来讲的，如果只是截取辐射场的一部分，它可以拥有其他阶数的角动量。对于任何形式的辐射，在远场区某一局域内介质体“感受”到的波都可以近似视作平面波，这意味着即使激励源是只含有高阶l，高阶角动量占主导的散射也只能在近场区观察到，入射场必须足够“非均匀”。

4.3 电四极激励

均匀介质球能被偶极天线激发出占主导偶极辐射，证实了之前的判断。现在需要验证 $l=2$ 的情形，我们面临的第一个问题是：什么样的激励源可以产生只含 $l=2$ 角动量的场?

从根本上来说，这还是依赖于起散射场与激励电流基于多极矩展开的数学关系，激励电流可被分解为电流多极矩。l 阶电流多极矩的定义式为：

$$M^{(l)} = \frac{i}{(l-1)!\omega}\int \mathbf{J}_{total}(\mathbf{r})\underbrace{\mathbf{rr}...\mathbf{r}}_{l-1}d^3\mathbf{r}$$

其中 $\mathbf{J}_{total}(\mathbf{r})$ 为总激励电流。点电流元可以表示为 $\mathbf{J}_{total}(\mathbf{r}) = \mathbf{I}L\delta(\mathbf{r})$，即一个长为 L 的导线携带有复振幅为 I 的随时间谐变的电流，其完全等效于一赫兹振子。

通过点电流元 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ 和一坐标变换算符 $\zeta(\hat{u}) = -s\dfrac{d}{du}$($u$ 为 x,y,z 或其线性组合)，可以构造出总激励电流 $\mathbf{J}_{total}(\mathbf{r})$。坐标变换算符的作用如下：当 $\zeta(\hat{u})$ 作用于电流元时，它将复制出两份电流元，一份沿 u 方向平移 $s/2$，另一份沿 $-u$ 方向平移 $s/2$ 并绕其中心旋转 180（即复振幅相位差 π）。

以下通过一个例子说明这一点。现在假设方向沿 y 轴正向的 $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{y}}IL\delta(\mathbf{r})$ 中心位于原点。$\mathbf{J}_x(\mathbf{r}) = \zeta(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{J}(\mathbf{r})$ 的图案由将 $J(\mathbf{r})$ 沿 x 轴正向平移 $s/2$，再构造一中心位于 $(-s/2,0,0)$，方向沿 y 轴负向的电流元组成（见图11），而 $\mathbf{J}_{yx}(\mathbf{r}) = \zeta(\hat{\mathbf{y}})\zeta(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{J}_x(\mathbf{r})$ 的图案由 $\mathbf{J}_x(\mathbf{r})$ 的图案沿 y 轴正向平移 $s/2$，和 $\mathbf{J}_x(\mathbf{r})$ 的图案沿 y 轴平移负向 $s/2$ 再使各电流元旋转 180° 构成。

因此，每个 l 阶电流多极矩由 p 个经过 $\zeta(\hat{u})$ 作用 $(l-1)$ 次的 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ 构成，p 的数值和坐标算符 $\zeta(\hat{u})$ 的 u 需要通过求解电多极系数得到。对于二阶电流多极矩（产生电四极辐射场），$M^{(l)}$ 就是二阶张量 Q，$Q_{ij} = \dfrac{i}{\omega}\displaystyle\int \mathbf{J}_{ij}(\mathbf{r})\mathbf{r}d^3\mathbf{r}$ 正是经 $\zeta(\hat{j})$、$\zeta(\hat{i})$ 先后作用于 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ 得到的电流多极矩，而阶数为 (l,m) 的电多极系数 $a_E(l,m)$ 总可以分解为 p 个独立的多极矩 Q_{ij} 之和。通过观察电多极系数 $a_E(l,m)$ 所含有的各 Q_{ij} 项的符号与下标，就可以推断出 (l,m) 阶电多极矩辐射源的电流位型。

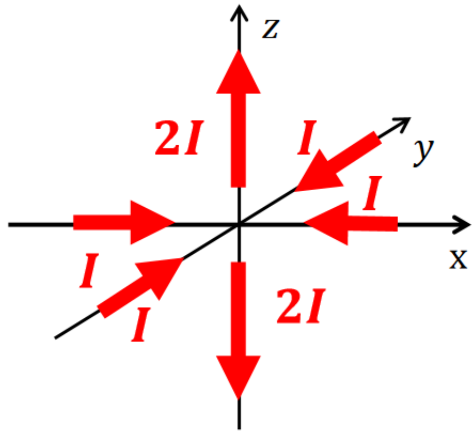

图 12: 电四极辐射的源电流位形

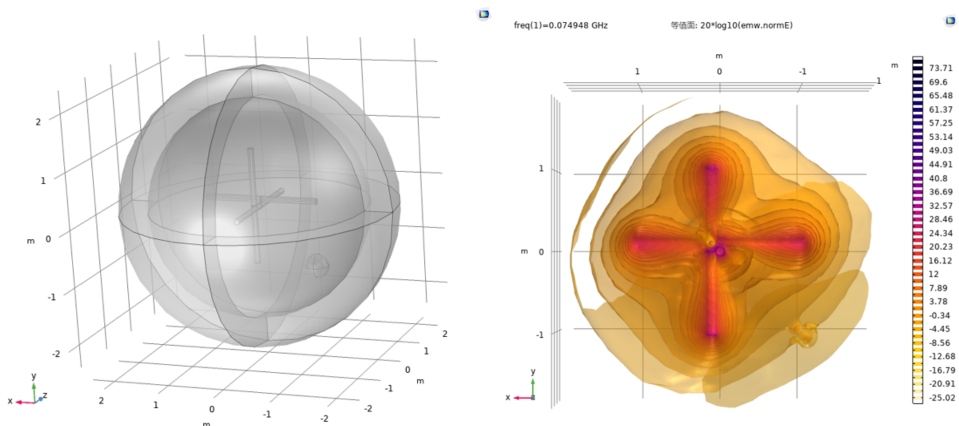

图 13: 由三根相互垂直的偶极天线产生电四极辐射。左图显示了天线与介质球的相对位置，右图为四极天线的功率等值面图

电四极辐射多极矩系数的与平面波中电多极系数的计算遵循类似的步骤，其本质都是利用球谐函数积分将冗杂项消去，由于此处还需考虑散射场与源电流之间的关系，计算将会更加复杂，此处略去复杂的数学推导，直接给出结果。

$$a_E(2,0)=\sqrt{6}C_2[2Q_{zz}-Q_{xx}-Q_{yy}]$$

产生电四极辐射的源电流位形应如图12所示。回到如何产生 $l=2$ 的电四极辐射这一问题：需要三根相互垂直、中心均位于原点的天线（见图13），而沿 z 轴的天线与位于 xOy 平面上的两根天线相比，其集总端口的输入电压应有数值上 2 倍，相位上 π 的差异。

在 $(-0.5,-0.5\ ,0)$ 处放置一均匀电介质球，观察通过其球心且垂直于 z 轴切面上的电场模图（见图14），可以观察到在 $\phi=45$、215 的方向上出现极大值，在 $\phi=135$、315 的方向上出现极小值，这正是电四极辐射的特点。计算各阶电多极矩的散射截面，$|\dfrac{\sigma(2,0)}{\sigma(1,0)}|^2\approx 10^1$，同样说明产生了占主导的电四极散射。

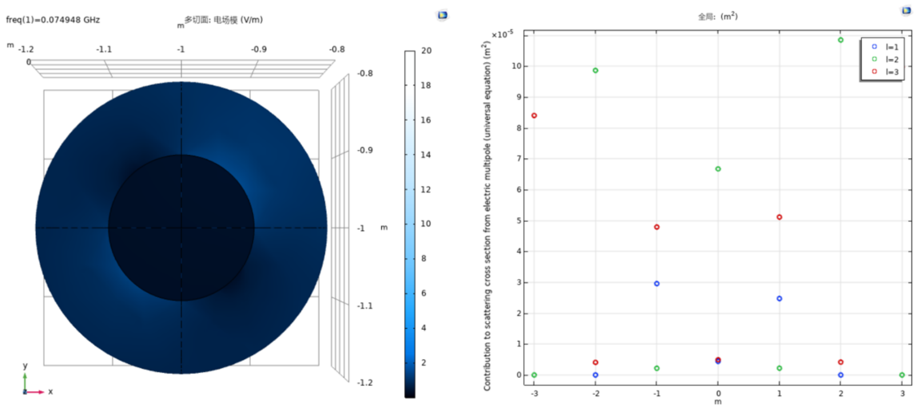

图 14: 处于电四极辐射场中的均匀介质球。左图显示了介质球附近的电场模，右图显示了各阶电多极矩对散射截面的贡献

5 总结

通过将求解静电场中均匀介质球外电势的问题转化为长波极限下的散射问题，本文得到了介质体内激发占主导的电四极矩散射的条件，以下做一总结。我们首先分析了散射的物理过程：散射场的最终形式依赖于总场与介质体间的反复作用，而玻恩近似提供了这一物理过程的数学描述。我们将标量场的玻恩近似推广到矢量场，并分析了一阶、二阶玻恩近似下散射场的微分散射截面，指明近似到二阶对定性判断电偶极、电四极辐射强度的必要性。接下来通过分析散射场的积分-微分方程，给出了激发占主导的电四极辐射的两种方式：改变散射体和改变激励源。在“改变散射体”一节中，我们通过仅改变相对介电常数 ε_r 和仅改变位形两种方式，从理论和模拟两个角度验证了使电四极散射对总散射截面的贡献大于电偶极散射的可能性。而在“改变激励源”一节中，我们首先阐释了散射场产生的物理机制，由传导电流和位移电流构成的散射电流是散射场“源”，其次从理论上证明了平面波不可能在均匀介质球中激发占主导的电四极矩，从而说明了使用单模激励源的必要性。通过分析联系总场与散射电流的两条方程，我们解释了体系高对称性在保持散射场单模特性的必要性，并验证了电偶极激励在均匀介质球中只会产生电偶极响应。最后我们通过一套基于多极矩展开的理论，给出了电四极激励源的源电流位形及产生电四极辐射的方式，并同样验证了均匀介质球对电四极激励将产生占主导的电四极散射响应。

参考文献

[1] Jackson J D. Classical electrodynamics[M]. 1999.

[2] 蔡圣善, 朱耘, 徐建军. 电动力学 [M]. 2006.

[3] Grahn P, Shevchenko A, Kaivola M. Electromagnetic multipole theory for optical nanomaterials[J]. New Journal of Physics, 2012, 14(9): 093033.

[4] Grahn P, Shevchenko A, Kaivola M. Electric dipole-free interaction of visible light with pairs of subwavelength-size silver particles[J]. Physical Review B, 2012, 86(3): 035419.

后记

本文由作者在周磊老师和朱涵助教的指导下完成，非常感谢周老师多次与我的深入讨论，这对指明研究方向、搭建研究框架以及建立对散射理论的正确认识起了很大的作用，也非常感谢助教的耐心解答，帮助我解决了在 Comsol 和一些理论知识上的疑惑。由于作者水平有限，恳请各位批评指正。