

非均匀介质体系的静电问题求解

黄凌浩 16307110142 物理学系
靳小博 16307110124 物理学系

摘要

导体球处于介电常数不同的两种分块均匀介质中，交界面平分导体球，对于这个问题一般采用猜解的方法。但由于外部介质并无球对称性，直接假设电场球对称不够严谨。本文采用本征函数展开法严格地考察这一问题，分析了其中猜解的物理根源，并对不同介电常数介质分布更为复杂的体系进行探究，进一步推广了可以猜解的体系。另外对于本征函数法无法严格求解的体系进行近似处理，仍然用本征函数法研究其局域近场行为，得到和模拟一致的结果。

I.引言

对于均匀介质体系，静电问题的求解是相对比较容易的，但如果空间中的介质不均匀，往往会使求解变得困难，以下我们针对较特殊的一些体系的静电问题求解进行讨论。

我们的出发点是如图 1 所示的体系：一个导体球，外部包围两种不同介电常数的均匀介质，介质的交界面顶点经过球心，所夹立体角为任意值。类似的问题在二维体系中也存在：无限长导体圆柱，外部两种介质的交界面通过圆柱中轴线，所夹二面角为任意值。

求解这类问题的一种直接的思路是：先假设电场为球对称的（若是对二维问题，假设电场为旋转对称），然后说明这种形式的解能够满足问题的所有边界条件，那么根据唯一性定理，所猜出的解就是这个体系的正确解。不过，由于外部介质本身不具有球（旋转）对称性，所以一开始就做电场为球（旋转）对称的假设其实只是数学上的操作，物理上的原因并不清晰。因此，我们希望利用严格的本征模式展开法来严格地考察这类问题，来说明做这样的假设道理何在。

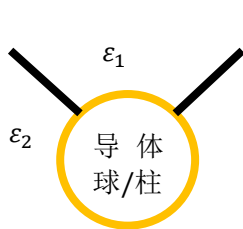


图 1 导体球（柱）外包围两种均匀介质示意图

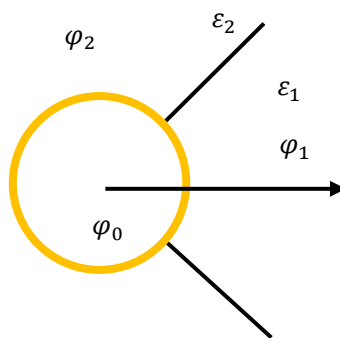


图 2 导体圆柱体系

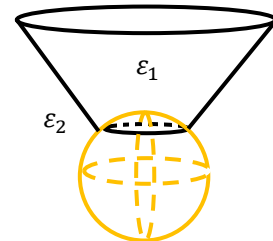


图 3 导体球体系

II. 介质交界面过球心（轴心）体系的严格求解

先来看数学上比较简单的二维问题：如图 2，圆柱（半径为 R ）外部有 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 两介质，圆柱电势为 φ_0 ，根据体系的镜像对称性，以交界的角平分线为极轴，建立极坐标系。

所以电势满足方程：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_1 = 0, 0 \leq \phi \leq \alpha \\ \nabla^2 \varphi_2 = 0, \alpha \leq \phi \leq \pi \end{cases} \quad (1)$$

易根据介质交界面处、金属、无穷远边界条件得到：

$$\begin{cases} \varphi_1|_{\phi=\alpha} = \varphi_2|_{\phi=\alpha} \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \phi}|_{\phi=\alpha} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \phi}|_{\phi=\alpha} \\ \varphi|_{\rho=R} = \varphi_0 \\ \vec{E}|_{\rho \rightarrow \infty} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

由于镜像对称性，有：

$$\begin{cases} \varphi_1, \frac{\partial \varphi_1}{\partial \phi} \text{ 在 } \phi = 0 \text{ 处连续} \\ \varphi_2, \frac{\partial \varphi_2}{\partial \phi} \text{ 在 } \phi = \pi \text{ 处连续} \end{cases} \quad (3)$$

可以根据分离变量法，设 $\varphi = \Phi(\phi)R(\rho)$ ，求解电势方程(1)，得到径向、角向方程：

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda \Phi = 0 \\ \rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0 \end{cases} \quad (4)$$

先根据 ϕ 的边界条件求解 ϕ 的方程，以确定本征值与本征函数：首先讨论本征值的可能取值：

1° $\lambda < 0$ 时，设 $\lambda = -\gamma^2$ 。由(4)，有 $\Phi(\phi) = \begin{cases} A_1 e^{\gamma \phi} + A_2 e^{-\gamma \phi}, 0 \leq \phi \leq \alpha \\ B_1 e^{\gamma \phi} + B_2 e^{-\gamma \phi}, \alpha \leq \phi \leq \pi \end{cases}$ ， A_1, A_2, B_1, B_2 均为待定系数；进一步由(3)，有：

$\begin{cases} A_1 = A_2 \\ B_1 e^{\gamma \pi} = B_2 e^{-\gamma \pi} \end{cases}$ ，则可以把 $\Phi(\phi)$ 改写为 $\begin{cases} A \cosh \gamma \phi, & 0 \leq \phi \leq \alpha \\ B \cosh \gamma(\phi - \pi), & \alpha \leq \phi \leq \pi \end{cases}$ ，其中 A, B 为待定系数。最后由(2)得到待定系数满足的方程组：

$\begin{cases} A \cosh \gamma \alpha = B \cosh \gamma(\alpha - \pi) \\ \varepsilon_1 A \sinh \gamma \alpha = \varepsilon_2 B \sinh \gamma(\alpha - \pi) \end{cases}$ ，方程组只有 $A = B = 0$ 解，即只有 $\Phi(\phi) = 0$ 的平庸解，最后是不可能满足 $\begin{cases} \varphi|_{\rho=R} = \varphi_0 \\ \varphi|_{\rho \rightarrow \infty} = 0 \end{cases}$ 的边界条件的，因此排除 $\lambda < 0$ ；

2° $\lambda = 0$ 时，由(3)(4)有： $\Phi(\phi) = \begin{cases} A, 0 \leq \phi \leq \alpha \\ B, \alpha \leq \phi \leq \pi \end{cases}$ ， A, B 为待定系数。根据(2)有： $A = B$ ，那么可取 $\Phi_0(\phi) = 1$ ，对应的是旋转对称的势场；

3° $\lambda > 0$ 时，设 $\lambda = \gamma^2$ ，同样地由(3)(4)有： $\begin{cases} A \cos \gamma \phi, & 0 \leq \phi \leq \alpha \\ B \cos \gamma(\phi - \pi), & \alpha \leq \phi \leq \pi \end{cases}$ ， A, B 为待定系数。再根据(2)有：

$$\begin{cases} A \cos \gamma \alpha = B \cos \gamma(\alpha - \pi) \\ \varepsilon_1 A \sin \gamma \alpha = \varepsilon_2 B \sin \gamma(\alpha - \pi) \end{cases} \quad (5)$$

由(5)可得到 γ 满足方程： $\varepsilon_1 \sin \gamma \alpha \cos \gamma(\alpha - \pi) + \varepsilon_2 \cos \gamma \alpha \sin \gamma(\alpha - \pi) = 0$ ，可形式上

将第 n 个本征值记为 γ_n ,那么方程组(5)的解可取为: $\begin{cases} A = \cos \gamma_n(\alpha - \pi) \\ B = \cos \gamma_n \alpha \end{cases}$,对应的本征函数为:

$$\Phi_n(\phi) = \begin{cases} \cos \gamma_n(\alpha - \pi) \cos m\phi, 0 \leq \phi \leq \alpha \\ \cos \gamma_n \alpha \cos m(\phi - \pi), \alpha \leq \phi \leq \pi \end{cases}$$

确定了本征函数,还需要找到使不同本征值的本征函数正交的权函数。可以得到(具体计算可见附录): $w(\phi) = \begin{cases} \varepsilon_1, 0 \leq \phi \leq \alpha \\ \varepsilon_2, \alpha \leq \phi \leq \pi \end{cases}$ 。这其实挺符合直觉的:不同区域的介电常数不同,权函数正反映了这种不均匀性。这样,对 $m \neq n$,就有 $\int_0^\pi \Phi_m(\phi) \Phi_n(\phi) w(\phi) d\phi = 0$

ρ 的方程容易求解: $\lambda = 0$ 时,有 $R(\rho) = C_0 + D_0 \ln \rho$; $\lambda > 0$ 时,对 $\lambda_n = \gamma_n^2$,有 $R(\rho) = C_n \rho^{\gamma_n} + D_n \rho^{-\gamma_n}$ 。于是最后电势的通解可以写成:

$$\varphi = \underbrace{A_0 + B_0 \ln \rho}_{\lambda=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{C_n \rho^{-\gamma_n} \Phi_n(\phi) + D_n \rho^{\gamma_n} \Phi_n(\phi)}_{\lambda>0} \quad (6)$$

接下来根据 ρ 的边界条件确定所有待定系数,根据(2)中 $\vec{E}|_{\rho \rightarrow \infty} = 0$,通解中不低于 ρ^1 的项的系数均应为0: $D_n = 0$;根据(2)中 $\varphi_{1,2}|_{\rho=R} = \varphi_0$,由于方程右边只有0阶项,所以利用不同本征值的本征函数相互正交的性质,高阶项都为0: $C_n = 0$,且 $A_0 + B_0 \ln R = \varphi_0$,于是电势最终求解出来了:

$$\varphi = -\frac{\varphi_0 \ln R_0}{\ln \frac{R}{R_0}} + \frac{\varphi_0}{\ln \frac{R}{R_0}} \ln \rho \quad (\text{这里取了 } \rho = R_0 \text{ 处为电势零点}) \quad (7)$$

电场易得,从略。

对球的体系的做法也是类似的:如图3,以导体球(半径为 R)球心为原点,建立球坐

标系,设介质交界面满足方程: $\theta = \alpha$ 。容易得到边界条件:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_1 = 0, 0 \leq \theta \leq \alpha \\ \nabla^2 \varphi_2 = 0, \alpha \leq \theta \leq \pi \\ \varphi_1|_{\theta=\alpha} = \varphi_2|_{\theta=\alpha} \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta}|_{\theta=\alpha} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta}|_{\theta=\alpha} \\ \varphi|_{\rho=R} = \varphi_0 \\ \varphi|_{\rho \rightarrow \infty} = 0 \end{cases} \quad \text{。设}$$

电势的分离变量形式: $\varphi = R(r)\theta(\theta)\Phi(\phi)$,由旋转对称性知 $\Phi(\phi) = 1$ 。然后求解 $\theta(\theta)$,根据 θ 的边界条件得到本征值 ν 满足方程: $\varepsilon_2 P_\nu(\cos \alpha) P'_\nu(-\cos \alpha) + \varepsilon_1 P_\nu(-\cos \alpha) P'_\nu(\cos \alpha) = 0$,

记第 n 个本征值为 ν_n ,对应的本征函数可取为: $\theta_n(\theta) = \begin{cases} P_\nu(-\cos \alpha) P_\nu(\cos \theta), 0 \leq \theta \leq \alpha \\ P_\nu(\cos \alpha) P_\nu(-\cos \theta), \alpha \leq \theta \leq \pi \end{cases}$,

权函数 $w(\theta) = \begin{cases} \varepsilon_1, 0 \leq \theta \leq \alpha \\ \varepsilon_2, \alpha \leq \theta \leq \pi \end{cases}$ 。求解 $R(r)$ 得: $R(r) = \frac{A}{r^{\nu+1}} + Br^\nu$ 。那么:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{r^{\nu_n+1}} + B_n r^{\nu_n} \quad (8)$$

最后根据 r 的边界条件以及 $\theta_n(\theta)$ 的正交性,只有 $A_0 \neq 0$,于是电势: $\varphi = \frac{\varphi_0 R}{r}$ 。电场易得,从略。

III. 解的物理分析

在这两个问题中，势场呈现出旋转对称或者球对称性，这种对称性正是来自于体系良好的结构与边界条件。比如以导体圆柱为例，如图 4 所示，导体边界条件要求电场要垂直于表面，因此导体附近的电场是沿着径向的；沿径向的电场没有穿过外部介质交界面，极化电荷不会影响原来电场的方向，所以电场在全空间都是沿径向的。进一步，很容易计算： $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$ ，所以空间中的极化电荷体密度为 0，这说明空间中只有导体表面存在净电荷（包括导体内表面的自由电荷，外表面的极化电荷）。如果总电荷分布不均匀，那么导体柱内部电场就不为 0，在电场驱动下，自由电荷就会重新分布，使得总电荷分布均匀。这也很容易验证：外表面极化电荷面密度为： $\sigma_p(\phi) = \hat{n} \cdot \vec{P} = \epsilon_0(1 - \epsilon(\phi))E(R_0)$ ，其中 $\epsilon(\phi) = \begin{cases} \epsilon_1, & -\alpha \leq \phi \leq \alpha \\ \epsilon_2, & \text{其它} \end{cases}$ ，内表面自由电荷面密度为： $\sigma_f(\phi) = -\hat{n} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon(\phi)E(R_0)$ ，所以总电荷面密度为： $\epsilon_0 E(R_0)$ ，为一个定值，所以最终全空间的电场是旋转对称的。对导体球的情形也是类似的，得到电场球对称的结果。

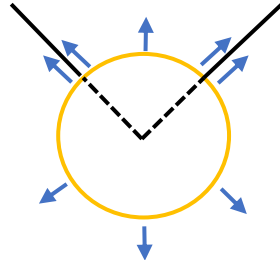


图 4 导体圆柱的电场示意图，可见电场方向是沿径向的

IV. 可猜解体系的推广

很容易将这个问题推广到外部由多个介质组成的体系，与前面的讨论类似，很自然地可以得到电势是旋转对称或者球对称的。那么，当介质数目越来越多，以至于 ϵ 随角向的变化趋于连续分布时（数学上可以写成 $\epsilon(\phi)$ （导体圆柱情形）或 $\epsilon(\theta, \phi)$ （导体球情形）的形式），我们仍然可以认为，在导体表面附近以外的介质区域激发的极化电荷没有破坏电场的对称性（事实上在前面这些情况中，只有导体外表面存在净的极化电荷），最终电场仍然可以保持旋转（球）对称性。

在这里，我们也给出了一开始提到的猜解方式为何能够起效的物理原因：正是由于源电场没有穿过介质的交界面，不会产生净极化电荷，因此导体可以通过电荷的重新分布而使得总电荷均匀分布于导体表面，最终的势场才呈现球对称或旋转对称分布。

更进一步，如果考虑介电常数随径向也会发生改变时，一般情况下的电势自然会比较复杂，难以解析求解。不过，我们关注的是什么情况下电势仍能保持（旋转）球对称性。我们发现，如果导体外的空间介电函数数学上满足 $\epsilon(\rho)\epsilon(\phi)$ （导体圆柱情形）或 $\epsilon(r)\epsilon(\theta, \phi)$ （导体球

情形)这样分量变量的形式, 我们仍然可以得到保持旋转对称或球对称的电势。比如, 如图 5 是采用数值模拟的办法, 对各种分离变量的介电函数形式求解得到的空间电势分布, 模拟的结果表明电势都是呈旋转对称或球对称分布。

以下我们利用解析方法对电势满足旋转对称性进行证明:

圆柱体系的介电函数为 $\varepsilon = \varepsilon_1(\rho)\varepsilon_2(\phi)$ 的形式。由于这时电势方程为 $\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \varphi) = 0$, 所以还不能用拉普拉斯方程下的本征函数展开电势。既然已有直观的模拟结果了, 我们可以假设电场势旋转对称的: $\vec{E} = E(\rho)\hat{e}_\rho$, 则电势也只是 ρ 的函数: $\varphi(\rho)$, 电势方程可化简为:

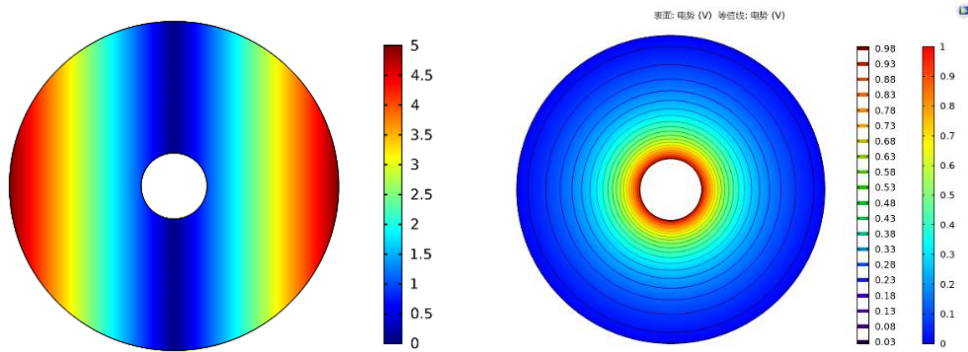
$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varepsilon \nabla \varphi) &= 0 \Rightarrow \nabla \varepsilon \cdot \nabla \varphi + \varepsilon \nabla^2 \varphi = 0 \\ &\Rightarrow -\left(\frac{d\varepsilon_1}{d\rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{d\varepsilon_2}{d\phi} \hat{e}_\phi\right) \cdot E(\rho) \hat{e}_\rho + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \nabla^2 \varphi = 0 \\ &\Rightarrow \varepsilon_1 \varepsilon_2 \nabla^2 \varphi = \frac{d\varepsilon_1}{d\rho} E(\rho) \end{aligned} \quad (9)$$

注意到右边只与 ρ 相关, 可把方程写成:

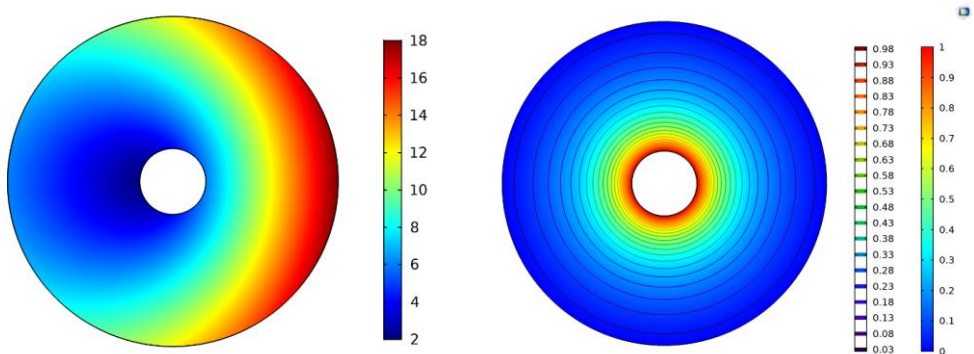
$$\nabla^2 \varphi(\rho) = f(\rho) \quad (10)$$

这是一个二维泊松方程, 结合 $\rho \rightarrow \infty$ 与 $\rho = R$ 的边界条件, 可知这个问题必存在旋转对称解, 由唯一性定理, 所得解就是问题的最终解。那么, 我们就证明了: 空间介电函数满足 $\varepsilon(\rho)\varepsilon(\phi)$ 形式时, 电势满足旋转对称性, 进而电场也满足旋转对称性。

三维球体系也是类似的方法证明。所以我们得到了进一步的结论: 当介电函数满足 $\varepsilon(\rho)\varepsilon(\phi)$ 或 $\varepsilon(r)\varepsilon(\theta, \phi)$ 的分离变量形式时, 非均匀介质交界面激发的极化电荷仍然不会破坏源电场的对称性, 电势、电场依然可以保持球(旋转)对称。



(a) 相对介电函数: $\varepsilon = \rho|\cos \phi|$



(b) 相对介电函数: $\varepsilon = (1 + \rho)(2 + \cos \phi)$

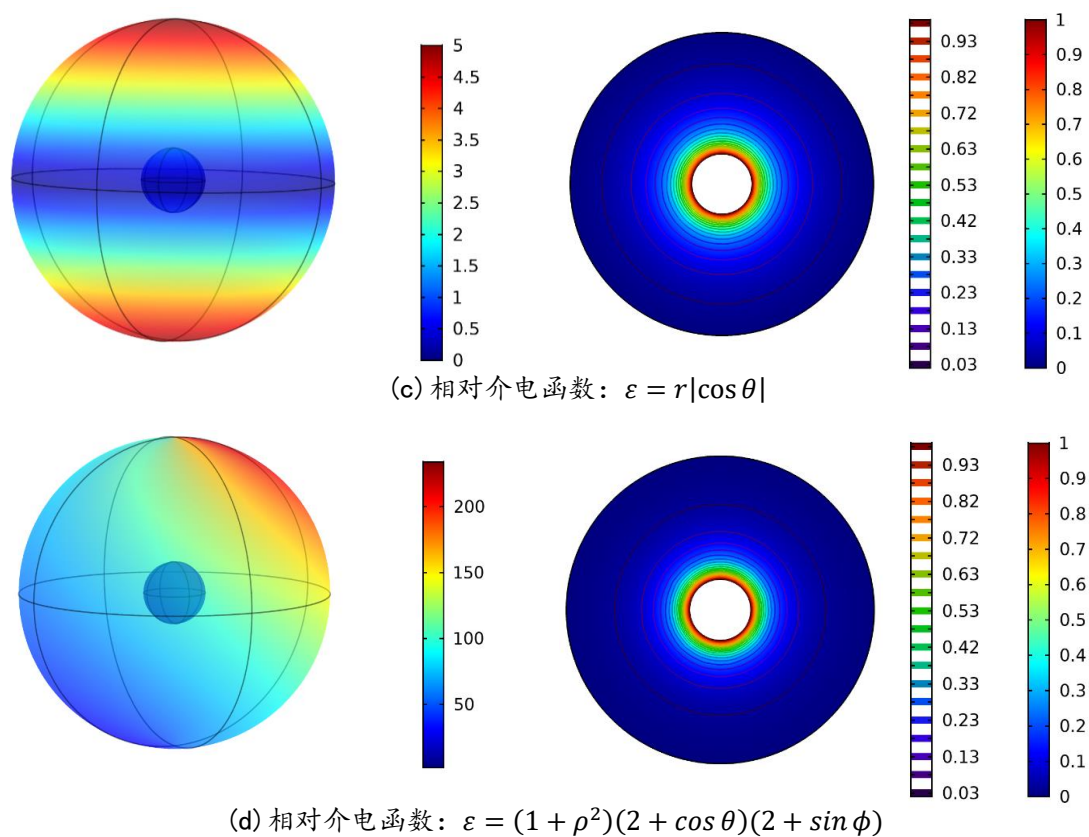
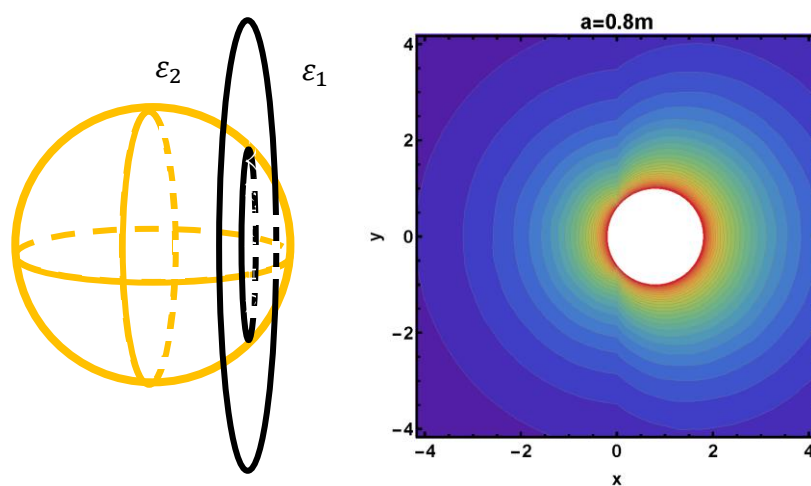


图 5 导体圆柱、导体球外介电函数、电势图。(a) (b) 为圆柱体系，(c) (d) 为球体系

V. 介质交界面不过球心（轴心）的体系

当边界条件和体系的对称性匹配不佳的情况，以介质交界面不过球心为例，数值模拟的结果如图 6，可以看出电势、电场最终不再呈球对称分布了，因此很显然，这时不可能简单地通过猜解得到此时静电场的解了。那么，使用本征模式展开法可以求解这一问题吗？



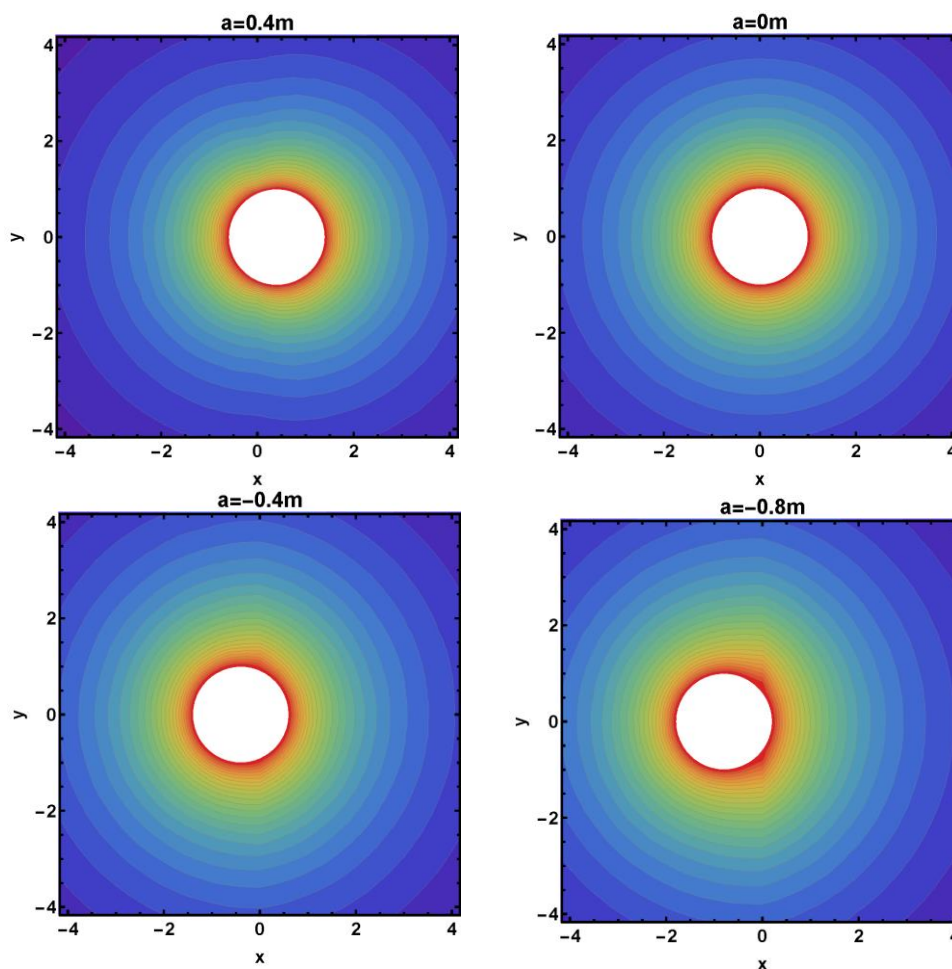


图 6 介质界面不经过导体球球心的电势图。数值模拟中取导体球电势 $\varphi_0 = 1V$ ，半径 $R = 1m$ ，右侧介质介电常数 $\varepsilon_1 = 1$ ，左侧 $\varepsilon_2 = 10$ 。(a) 为示意图，(b)~(f) 为不同 a 的电势图

本征模式展开法求解问题有个前提，那就是需要使我们所选取的坐标系与整个体系的对称性相匹配，这样才可以在我们所用的坐标系下将边界条件写成分离变量的形式，从而转化为本征值问题，进而求解。对于介质的界面过导体球心或轴心的体系，界面与球坐标和柱坐标的对称性匹配，如前所述，我们可以利用分离变量法来求解；而对界面不过球心的体系，界面形状与球坐标或柱坐标不匹配，那么如果还是按照前面的思路选择坐标系，在这两种坐标系下就无法将边界条件分离变量，无法转化为本征值问题，于是无法利用本征模式展开法求解。

所以，如果要想利用本征模式展开法，可能的方案有：1. 找到一个合适的坐标系，使边界条件、体系的对称性与坐标系相匹配；2. 做特殊的变量代换，使变换后的边界与变换后的坐标系匹配，其中的一种方法就是保角变换法，但是对我们考虑的这个体系，这些方法在数学上都相当不容易，所以本征模式展开法难以求解这一问题。

既然严格求解有困难，我们就希望寻求对这个问题的定性认识。界面和导体几何形状对应的球坐标系并不一致，那我们想办法取消掉其中一项的对称性限制：我们先在导体、两种介质交界点附近考察近场的电势分布，这就相当于让导体球半径趋于无限大，成为无限大

平面，介质交界面也可以近似成与导体表面夹某个角度的半平面，如图 7 所示。这样就取消了导体几何形状的对称性限制，于是我们就能以交界点为原点，建立极坐标系。为了使问题定解，我们再假设导体的电势为 0，在 $\rho = R$ 处为一等电势面 φ_0 ，于是这个问题就与前面柱的问题非常类似，所以能利用本征模式展开法来求解了。

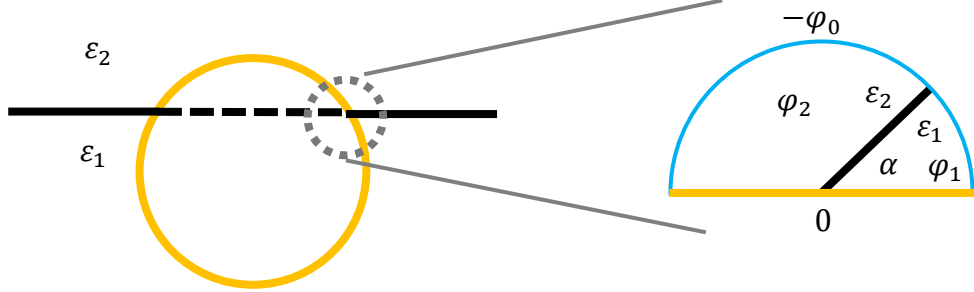


图 7 考察导体球的近场，建立极坐标系，并确定各边界的边界条件

接下来就来具体求解一下：易知电势方程与边界条件为：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_1 = 0, 0 \leq \phi \leq \alpha \\ \nabla^2 \varphi_2 = 0, \alpha \leq \phi \leq \pi \\ \varphi_1|_{\phi=\alpha} = \varphi_2|_{\phi=\alpha} \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \phi}|_{\phi=\alpha} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \phi}|_{\phi=\alpha} \\ \varphi_{1,2}|_{\rho=R} = -\varphi_0 \\ \varphi_{1,2}|_{\rho \rightarrow 0} = 0 \\ \varphi_1|_{\phi=0} = 0 \\ \varphi_2|_{\phi=\pi} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

这里为使边界条件齐次化，所以假设导体为零电势体，这可以通过移动电势零点得到。注意到后面四个边条和前面的柱的问题有所不同，因此最终本征函数也会有所不同。与前面同样的做法，我们可以得到本征值与本征函数。可以根据边界条件计算得到：这时本征值 $\lambda \leq 0$ 时都只能得到 $\Phi(\phi) = 0$ 的平庸解，只有 $\lambda > 0$ 的解存在非平庸的解，且满足方程： $\frac{1}{\varepsilon_1} \tan \sqrt{\lambda} \alpha + \frac{1}{\varepsilon_2} \tan \sqrt{\lambda} (\pi - \alpha) = 0$ ，记第 n 个本征值为 λ_n ，相应的本征函数也容易得到：

$$\Phi_n(\phi) = \begin{cases} \sin \sqrt{\lambda_n} (\pi - \alpha) \sin \sqrt{\lambda_n} \phi, 0 \leq \phi \leq \alpha \\ \sin \sqrt{\lambda_n} \alpha \sin \sqrt{\lambda_n} (\pi - \phi), \alpha \leq \phi \leq \pi \end{cases}, \text{ 权函数满足: } \rho(\phi) = \begin{cases} \varepsilon_1, 0 \leq \phi \leq \alpha \\ \varepsilon_2, \alpha \leq \phi \leq \pi \end{cases}.$$

同样地解出 $R(\rho)$ ，得到电势的通解形式：

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{\sqrt{\lambda_n}} \Phi_n(\phi) + D_n \rho^{-\sqrt{\lambda_n}} \Phi_n(\phi) \quad (13)$$

可以看到由于不存在 $\lambda = 0$ 项了，所以在确定待定系数的时候，会出现高阶项：利用边界条件 $\varphi_{1,2}|_{\rho \rightarrow 0} = 0$ 知 $D_n = 0$ ，利用边界条件 $\varphi|_{\rho=R} = \varphi_0$ 确定待定系数 C_n ：

$$C_n = R^{-\sqrt{\lambda_n}} \frac{\int_0^\pi -\varphi_0 \Phi_n(\phi) \rho(\phi) d\phi}{\int_0^\pi |\Phi_n(\phi)|^2 \rho(\phi) d\phi} \quad (14)$$

这个系数一般需要数值计算，我们以 $\alpha = 14.1^\circ, \varphi_0 = 1, R = 1, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 10$ 为例，计算到 400 项，系数大小如图 8 所示，可见其实 200 项以后，系数已经足够小了，可以忽略更

高阶的项。

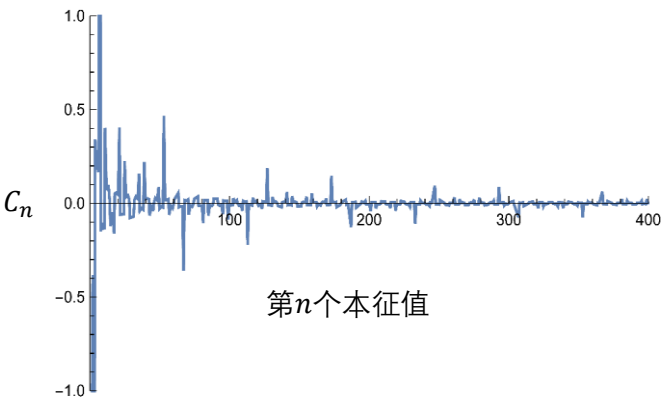
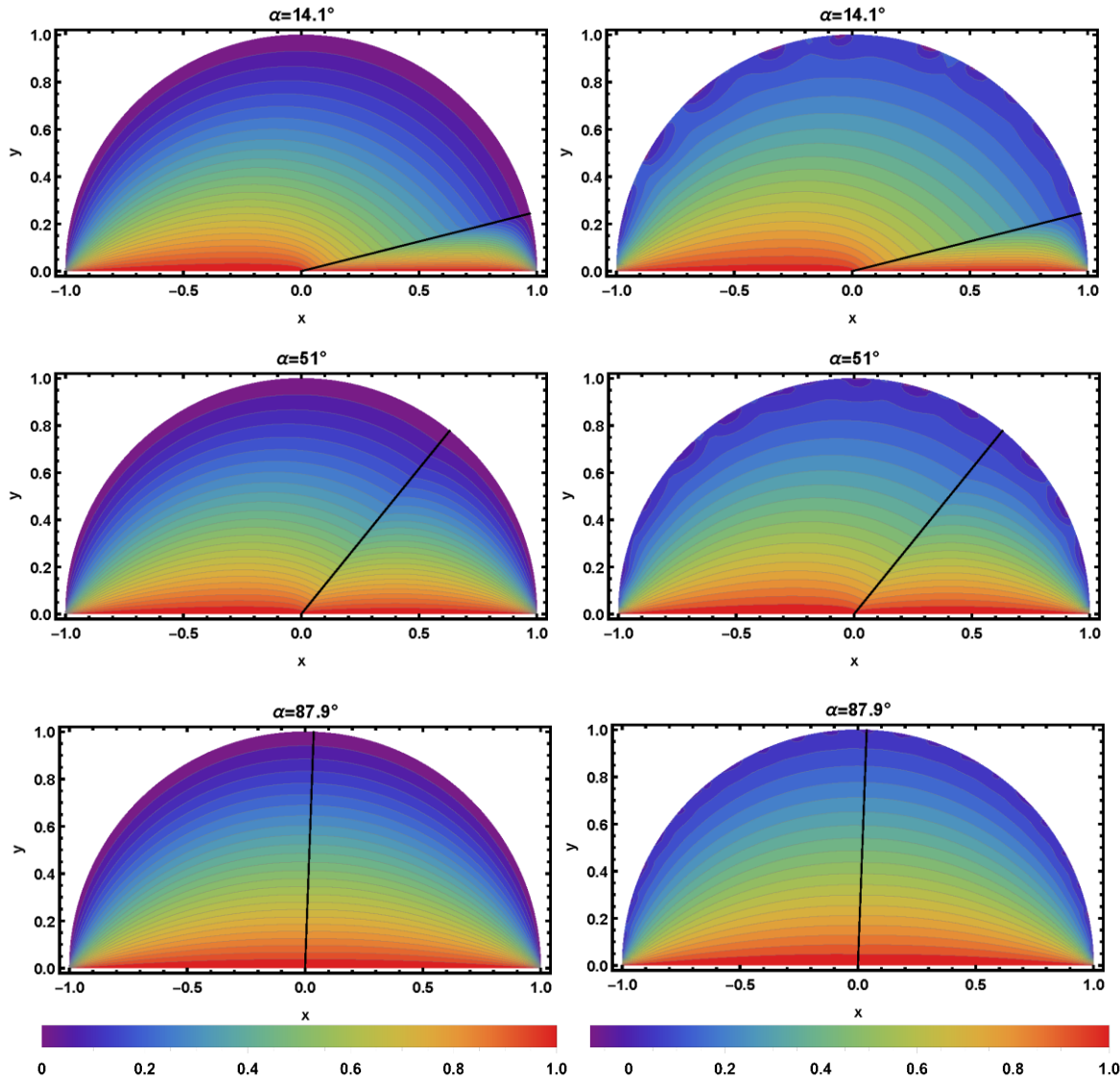


图 8 不同本征值对应的展开系数图

因此，我们利用本征模式展开法计算了不同 α 的电势结果（均保留了 200 项），与数值模拟结果对比（图 9），总体上结果是很接近的，尤其是近场的结果吻合得很好。



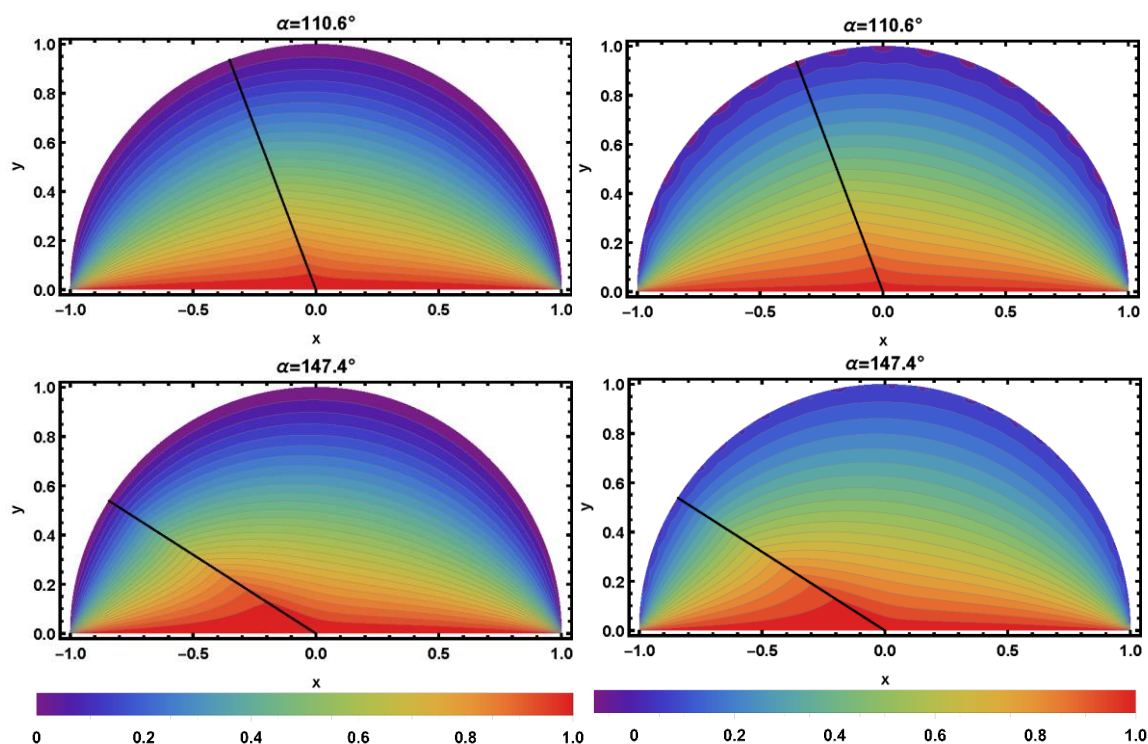


图 9 不同界面夹角 α 下模拟与解析计算结果。其中取导体表面电势 $\varphi_0 = 1V$, $\rho = R = 1m$ 处为零电势面, 右侧介质介电常数 $\varepsilon_1 = 1$, 左侧 $\varepsilon_2 = 10$ 。

我们来分析一下得到的结果: 由于电场在导体表面是垂直的, 而交界面处因为极化电荷的存在, 会导致电场的切向连续, 法向不连续, 所以, 最后的电场线和等势线会在交界面处发生弯折。假设 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, 那么电势线和电场线在界面附近的行为如图 10 所示。所以, 在 α 小于 90° 时, 我们求解的体系电势线会向原点凹陷, α 大于 90° 时, 电势线会向外凸出。所以回到球的问题: 在近场的交界点附近, 我们已经解出了电势的行为, 和刚才求解的结果是类似的, 在其它离交界点比较远的位置, 因为导体边条的要求, 电势线会趋于平行导体表面, 所以电势的行为近似保持球对称; 至于在远场, 因为离球越远, 电场在交界面上越趋于平行, 所以极化电荷将衰减到可以忽略, 这时, 电势、电场就会趋于球对称的分布。

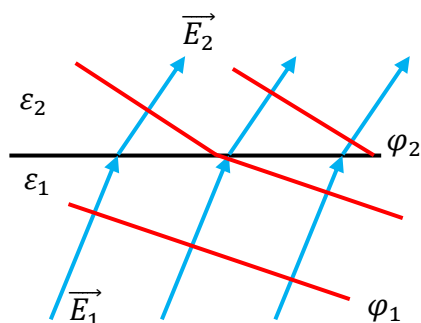


图 10 电势线和电场线在界面附近的行为

VI.总结

我们通过上面这些体系、求解过程表明：非均匀介质体系的问题中有部分情形可以解析或半解析地求解，我们采用了猜解与本征模式展开法两种方法来求解，得到的结论有：1.利用猜解解决了导体球或柱外部有多个介质，介质交界面过球心或柱中轴线的体系，并且说明了猜解的物理原因：要求体系对称性较高，空间中的极化电荷不会破坏对源电场的对称性。我们还推广了结论，对于导体球与导体柱体系，空间介电函数满足 $\varepsilon(r)\varepsilon(\theta, \phi)$ 、 $\varepsilon(\rho)\varepsilon(\phi)$ 形式的电势，电场最终还是保持球（旋转）对称。但超出对称性要求或介电函数形式的体系，以上条件就不满足了，猜解就失效了；2.利用本征模式展开法严格求解了前面利用猜解求解的体系，同时也说明了本征模式展开法对体系的对称性要求也比较高，对于交界面不过球心的体系，本征模式展开法也是难以求解的，但我们可以通过考察近场行为，对体系做一些近似，取消部分对称性限制来定性考察这种对称性不佳的体系。

参考文献

- [1] Meixner J. The behavior of electromagnetic fields at edges[J]. IEEE Transactions on antennas and propagation, 1972, 20(4): 442-446.
- [2] Andersen J, Solodukhov V. Field behavior near a dielectric wedge[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1978, 26(4): 598-602.
- [6] 吴崇试. 数学物理方法, (第2版) [M]. 高等教育出版社, 2003.
- [7] 胡嗣柱, 徐建军. 数学物理方法解题指导[M]. 高等教育出版社, 1997.
- [8] 周治宁, 吴崇试, 钟毓澍. 数学物理方法习题指导[M]. 2004.

附录:

证明对导体原柱问题中的权函数 $w(\phi)$ 为 $\begin{cases} \varepsilon_1, 0 \leq \phi \leq \alpha \\ \varepsilon_2, \alpha \leq \phi \leq \pi \end{cases}$:

设不同本征值 m 、 n 对应的本征函数为 $\Phi_m(\phi)$ 、 $\Phi_n(\phi)$ ，考虑积分:

$$I = \int_0^\pi \Phi_m(\phi) \Phi_n(\phi) w(\phi) d\phi$$

$$\text{利用 } \Phi''(\phi) + \lambda \Phi(\phi) = 0 \text{ 以及边界条件 } \begin{cases} \Phi_1|_{\phi=\alpha} = \Phi_2|_{\phi=\alpha} \\ \varepsilon_1 \frac{d\Phi_1}{d\phi}|_{\phi=\alpha} = \varepsilon_2 \frac{d\Phi_2}{d\phi}|_{\phi=\alpha} \\ \Phi_1, \frac{d\Phi_1}{d\phi} \text{ 在 } \phi=0 \text{ 处连续} \\ \Phi_2, \frac{d\Phi_2}{d\phi} \text{ 在 } \phi=\pi \text{ 处连续} \end{cases} \text{ 有:}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\alpha \Phi_{m1}(\phi) \Phi_{n1}(\phi) \varepsilon_1 d\phi + \int_\alpha^\pi \Phi_{m2}(\phi) \Phi_{n2}(\phi) \varepsilon_2 d\phi \\ &= -\varepsilon_1 \int_0^\alpha \Phi_{m1}(\phi) \lambda_n^{-1} \Phi_{n1}''(\phi) \varepsilon_1 d\phi - \varepsilon_2 \int_\alpha^\pi \Phi_{m2}(\phi) \lambda_n^{-1} \Phi_{n2}''(\phi) \varepsilon_2 d\phi \\ &= -\lambda_n^{-1} \left\{ \begin{aligned} &[\varepsilon_1 \Phi_{m1}(\phi) \Phi_{n1}'(\phi)]|_0^\alpha - \int_0^\alpha \Phi_{m1}'(\phi) \Phi_{n1}'(\phi) \varepsilon_1 d\phi + \\ &[\varepsilon_2 \Phi_{m2}(\phi) \Phi_{n2}'(\phi)]|_\alpha^\pi - \int_\alpha^\pi \Phi_{m2}'(\phi) \Phi_{n2}'(\phi) \varepsilon_2 d\phi \end{aligned} \right\} \\ &= \lambda_n^{-1} \left[\int_0^\alpha \Phi_{m1}'(\phi) \Phi_{n1}'(\phi) \varepsilon_1 d\phi + \int_\alpha^\pi \Phi_{m2}'(\phi) \Phi_{n2}'(\phi) \varepsilon_2 d\phi \right] \\ &= \lambda_n^{-1} \left\{ \begin{aligned} &[\varepsilon_1 \Phi_{m1}'(\phi) \Phi_{n1}(\phi)]|_0^\alpha - \int_0^\alpha \Phi_{m1}''(\phi) \Phi_{n1}(\phi) \varepsilon_1 d\phi + \\ &[\varepsilon_2 \Phi_{m2}'(\phi) \Phi_{n2}(\phi)]|_\alpha^\pi - \int_\alpha^\pi \Phi_{m2}''(\phi) \Phi_{n2}(\phi) \varepsilon_2 d\phi \end{aligned} \right\} \\ &= \lambda_n^{-1} \left[\int_0^\alpha \Phi_{m1}''(\phi) \Phi_{n1}(\phi) \varepsilon_1 d\phi + \int_\alpha^\pi \Phi_{m2}''(\phi) \Phi_{n2}(\phi) \varepsilon_2 d\phi \right] \\ &= \lambda_m \lambda_n^{-1} \left[\int_0^\alpha \Phi_{m1}(\phi) \Phi_{n1}(\phi) \varepsilon_1 d\phi + \int_\alpha^\pi \Phi_{m2}(\phi) \Phi_{n2}(\phi) \varepsilon_2 d\phi \right] \end{aligned}$$

所以 $I = \frac{\lambda_m}{\lambda_n} I$ ，又 $\lambda_m \neq \lambda_n$ ，所以 $I = 0$ ，即不同本征值的本征函数相互正交，这就证明了

$w(\phi) = \begin{cases} \varepsilon_1, 0 \leq \phi \leq \alpha \\ \varepsilon_2, \alpha \leq \phi \leq \pi \end{cases}$ 为这个体系的权函数。

对本文其它体系的权函数的证明方法也是类似的。