

椭圆接地边界-外电荷体系的电势求解

杨尧智 (17307110151) 熊子扬 (17307110150)

摘要 我们证明了在二维空间椭圆接地边界外放置点电荷的问题中，电势不能直接使用单个镜像电荷的镜像法求解；通过保角变换，可以间接使用圆形边界-外电荷体系的镜像法求解。介绍了保角变换在变换光学中的应用，保角变换对于二维的各向同性介质不会对介电常数和磁导率产生影响和改变，但三维的共形变换则不具备此特性。此外，我们用 COMSOL 对原问题进行了模拟。

目录

1	镜像法不能直接用于椭圆球壳	2
1.1	外电荷位于椭圆长短轴上	2
1.2	外电荷在椭圆外任意位置	2
1.3	椭圆退化为圆	3
2	使用保角变换求解电势	3
2.1	保角变换的物理性质	3
2.2	Joukowski 变换及其几何性质	4
2.3	椭圆外电势求解	5
2.4	一般情况解析解	5
2.5	保角变换拓展	8
3	二维情况下的 COMSOL 模拟	10
3.1	模拟真实物理场	10
3.2	用 COMSOL 数值求解泊松方程	12
3.3	COMSOL 数值结果与保角变换解的比较	14
4	总结	16

1 镜像法不能直接用于椭圆球壳

我们知道圆形接地边界-外电荷体系的电势可以使用镜像法求解，这为结果的导出带来了极大的方便。那么椭圆边界-外电荷体系的电势能否用镜像法求解呢？我们的结论是，对于接地椭圆边界外部放置一个点电荷的问题，不能使用一个镜像电荷来等效椭圆边界外部的静电场。证明如下：

只考虑二维情形。设椭圆为 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其中 a, b 均为正数。

1.1 外电荷位于椭圆长短轴上

简便起见，先考虑外部电荷在椭圆长短轴上的情况。在椭圆之外有一点电荷 q 位于 $(d, 0)$ ，假设其对应的镜像电荷 $-q'$ 位于 $(d', 0)$ 。椭圆上一点坐标用参数表示为 $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ 。

由边界接地，有

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} - \frac{q'}{r'} \right) = 0, \quad \forall P \in C$$

其中

$$r = \sqrt{(a \cos \theta - d)^2 + (b \sin \theta)^2}$$

$$r' = \sqrt{(a \cos \theta - d')^2 + (b \sin \theta)^2}$$

代入方程并换元 $t = \cos \theta$ 得

$$(a^2 - b^2)(q'^2 - q^2)t^2 - 2a(q'^2d - q^2d')t + q'^2(b^2 + d^2) - q^2(b^2 + d'^2) = 0, \quad \forall t \in [-1, 1]$$

因此各项系数都应该为 0，由二次和一次项可得

$$q' = q, \quad d' = d$$

此时常数项为 0，虽然满足恒成立，但是这个解不符合要求，故不存在镜像电荷满足边界条件。

1.2 外电荷在椭圆外任意位置

假如外电荷不处在长短轴上，我们也可以说明这一点，不妨设 $q(x, y), -q'(x', y')$ ，同理可得

$$(a^2 - b^2)(q'^2 - q^2)t^2 - 2a(q'^2x - q^2x')t - 2b(q'^2y - q^2y')\sqrt{1 - t^2}$$

$$+ q'^2(b^2 + x^2 + y^2) - q^2(b^2 + x'^2 + y'^2) = 0, \quad \forall t \in [-1, 1]$$

对 t 泰勒展开得到结果

$$\begin{aligned} & (q'^2 (b^2 + x^2 + y^2) - q^2 (b^2 + x'^2 + y'^2) - 2b (yq'^2 - q^2 y')) \\ & - 2(a(xq'^2 - q^2 x'))t + ((a^2 - b^2)(q'^2 - q^2) + b(yq'^2 - q^2 y'))t^2 \\ & + \frac{1}{4}b(yq'^2 - q^2 y')t^4 + \frac{1}{8}b(yq'^2 - q^2 y')t^6 + \frac{5}{64}b(yq'^2 - q^2 y')t^8 \\ & + O(t^{10}) = 0, \quad \forall t \in [-1, 1] \end{aligned}$$

可见从 t^4 开始后面项系数等于 0 是等价的。先用一次、二次、四次项系数为 0 三个方程解出三个未知数

$$q' = q, \quad x' = x, \quad y' = y$$

此时常数项也为 0，同样满足恒成立，但是这个解当然也不符合要求，所以不存在镜像电荷满足边界条件。

1.3 椭圆退化为圆

从上面的分析也可以看出，当 $a = b$ 时，椭圆退化为圆，恒成立方程的二次项系数为 0，这时问题就是讲义上的例题，可以验证镜像法存在有物理意义的解：

$$q' = \frac{R}{d}q, \quad d' = \frac{R^2}{d}$$

这时外电势的解为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} - \frac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{R^2}{d}\right)^2 - 2r\frac{R^2}{d} \cos \theta}} \right), \quad r > R$$

因此，圆形球壳-外点电荷体系存在镜像法是一种巧合，无法推广至椭圆形球壳-外电荷体系。

2 使用保角变换求解电势

我们在数理方法里知道，解析函数具有保角性，用解析函数表达的变换因此也被称为保角变换。事实上，保角变换还可以保证 Laplace 方程和 Poisson 方程正确性不变，可以用保角变换求解电势。

2.1 保角变换的物理性质

依旧只考虑二维空间。设原空间一点用复数表示为 $z = x + iy$ ，经过保角变换 $w = f(z)$ 得到像空间中一点 $w = u + iv$ 。两空间下二维 Laplace 算符分别为

$$\nabla_z^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla_w^2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

二者满足关系

$$\nabla_z^2 = |f'(z)|^{-2} \nabla_w^2$$

链式求导并代入解析函数 C-R 条件，即可证明上式。

原坐标系下的 Laplace 方程和 Poisson 方程

$$\begin{aligned}\nabla_z^2 \varphi(x, y) &= 0 \\ \nabla_z^2 \varphi(x, y) &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y)\end{aligned}$$

用新的坐标系即可表示为

$$\begin{aligned}\nabla_w^2 \varphi(x(u, v), y(u, v)) &= 0 \\ \nabla_w^2 \varphi(x(u, v), y(u, v)) &= -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho(x(u, v), y(u, v))}{|f'(z)|^2}\end{aligned}$$

可见 Laplace 方程仍然成立，Poisson 方程仅电荷密度分布发生了改变，此外由于

$$\begin{aligned}|f'(z)|^2 &= |f'(x)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\rho(x(u, v), y(u, v))}{|f'(z)|^2} du dv = \rho(x, y) dx dy$$

即电荷密度虽然发生变化，但是电荷量在变换前后守恒。

结合以上性质，我们可以用单值的保角变换将原空间静电场问题变换为像空间的静电场问题求解。因为

$$\varphi(x, y) = \varphi(x(u, v), y(u, v)) = \phi(u, v)$$

只要变换前后边界条件仍然满足，求出像空间电势分布 $\phi(u, v)$ 后通过变换坐标即可得到原空间电势分布 $\varphi(x, y)$ ，静电场问题得解。

2.2 Joukowski 变换及其几何性质

Joukowski 变换是一个保角变换，对应的解析函数为

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

该变换可以将原空间中以坐标原点为圆心的同心圆族 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 变为像空间中以 x 轴为长轴的共焦点椭圆族 $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ ，其中

$$a = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad b = \left| \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \right|, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$$

设 $z = re^{i\theta}$, 代入得

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta$$

即证。

注意到 $f(z)$ 的实数版本就是我们熟悉的对勾函数, 很容易看出这个变换并非单值的, $(1, +\infty)$ 与 $(0, 1)$ 段呈现出一定的对称性。对于原空间中 2 个半径为 r_1 和 r_2 的同心圆, 当 $r_1 r_2 = 1$ 时, 在像空间中对对应同一个椭圆。所以为了满足保角变换一一对应的条件, 我们在接下来的应用中, 尽量考虑 $r \geq 1$ 的情况。

2.3 椭圆外电势求解

回到原问题, 椭圆内电势显然为 0, 边界接地电势也是 0, 所以求解椭圆外电势即可。

为了方便叙述, 我们先直接将一个圆形球壳-外电荷体系的外电势解通过 Joukowski 变换为像空间里的椭圆球壳-外电荷体系的外电势解。为了避免 Joukowski 变换的多值性带来问题, 设原空间里球壳半径为 2, 外电荷电荷量为 1, 到圆心距离为 4 (不妨设其位于 x 轴正半轴上), 这样我们研究的区域就满足 $|z| > 1$ 。此时根据镜像法, 镜像电荷电荷量为 $1/2$, 离圆心距离为 1 (自然也在 x 轴正半轴上), 圆外电势分布用原空间极坐标 (r, θ) 表示为

$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + 4^2 - 8r \cos \theta}} - \frac{1/2}{\sqrt{r^2 + 1^2 - 2r \cos \theta}} \right)$$

变换之后像空间坐标用 (u, v) 表示, 椭圆为 $\frac{u^2}{(5/4)^2} + \frac{v^2}{(3/4)^2} = 1$, 点电荷位于长轴上 $u = \frac{17}{8}$ 处。坐标变换关系为

$$r = a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad \cos \theta = \frac{u}{|u|} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 - 1}{a^2} \frac{v^2}{u^2}}}$$

其中

$$a = \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + 1 + \sqrt{(u^2 + v^2 + 1)^2 - 4u^2}}{2}}$$

将这些关系代入 $\varphi(r, \theta)$ 即可得到椭圆外电势分布 $\phi(u, v)$ 。完整解析式过长, 并且写出来也不利于实际计算, 所以这里我们不写出。

2.4 一般情况解析解

本节将给出一般情况的坐标变换公式和外电势解析式。

实际问题中, 若给定焦距为 c 的椭圆, 可以使用 Joukowski 变换的逆变换

$$g(w) = \frac{w + \sqrt{w^2 - c^2}}{c}$$

将问题变换到像空间, 使用圆形球壳-外电荷体系镜像法求解。

首先, 我们给出 Joukowski 逆变换的坐标变换公式及其推导。

原空间中一点直角坐标和用其所在椭圆表示的参数形式为 (x, y) 和 $(a \cos \gamma, b \sin \gamma)$, 像空间中对应点的极坐标为 (r, θ) , 则

$$r = \frac{a+b}{c}, \quad \tan \theta = \frac{ay}{bx}$$

其中

$$a = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 1 + \sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2}}{2}}, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

证明 因为

$$a = \frac{c}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad b = \frac{c}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right), \quad \gamma = \theta$$

所以

$$r = \frac{a+b}{c}, \quad \tan \theta = \tan \gamma = \frac{ay}{bx}$$

而

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 + b^2 = c^2$$

所以

$$a = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + c^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2}}{2}}, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

即证。

回到问题: 一般地, 设接地椭圆边界方程为 $\frac{x^2}{a_m^2} + \frac{y^2}{b_m^2} = 1 (a_m > b_m)$, 焦距为 c ; 外电荷电荷量为 q , 位于空间中直角坐标为 (x_0, y_0) 的点。在上面的 Joukowski 逆变换下, 椭圆边界变为圆形边界 $u^2 + v^2 = R^2$, 其中 $R = \frac{a_m + b_m}{c}$; 外电荷电荷量仍然为 q , 位于像空间中极坐标为 (d, α) 的点。变换后边界条件仍然满足。根据已知结果, 像空间中外电势分布为

$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\theta - \alpha)}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2 d^2}{R^2} + R^2 - 2rd \cos(\theta - \alpha)}} \right), \quad r > 1$$

根据坐标变换公式, 代入

$$r = \frac{a+b}{c}, \quad d = \frac{a_0 + b_0}{c}, \quad \cos(\theta - \alpha) = \frac{\text{sgn}(xx_0) \left(1 - \frac{ay}{bx} \frac{a_0 y_0}{b_0 x_0} \right)}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{ay}{bx} \right)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{a_0 y_0}{b_0 x_0} \right)^2 \right)}}$$

其中

$$a = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + c^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2}}{2}}, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2},$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{x_0^2 + y_0^2 + c^2 + \sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + c^2)^2 - 4c^2x_0^2}}{2}}, \quad b_0 = \sqrt{a_0^2 - c^2}$$

即可得到外电势分布

$$\varphi(x, y) = \phi(r, \theta), \quad \frac{x^2}{a_m^2} + \frac{y^2}{b_m^2} \geq 1$$

内电势分布显然为

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \frac{x^2}{a_m^2} + \frac{y^2}{b_m^2} \leq 1$$

电场强度为

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi(x, y)$$

我们编写了一般情况的 MATLAB 代码，输入问题中的参数即可得到电势和电场的分布图像。例如上一节中的例子，对应图像如图1所示。

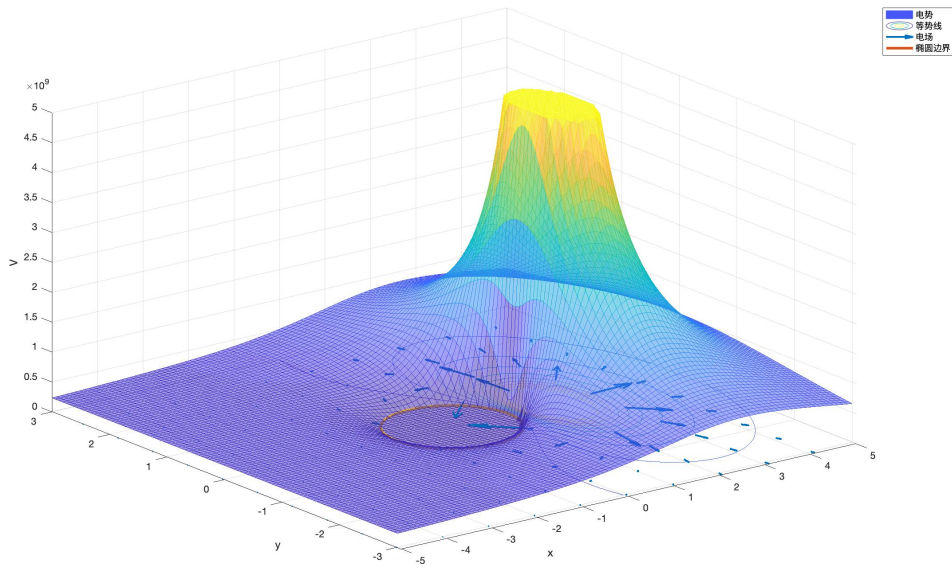


图 1: 2.3 中的例子

又如，取

$$a_m = 2\text{m}, \quad b_m = 1\text{m}, \quad q = 1\text{C}, \quad (x_0, y_0) = (4, 4)\text{m}$$

对应图像如图13所示。

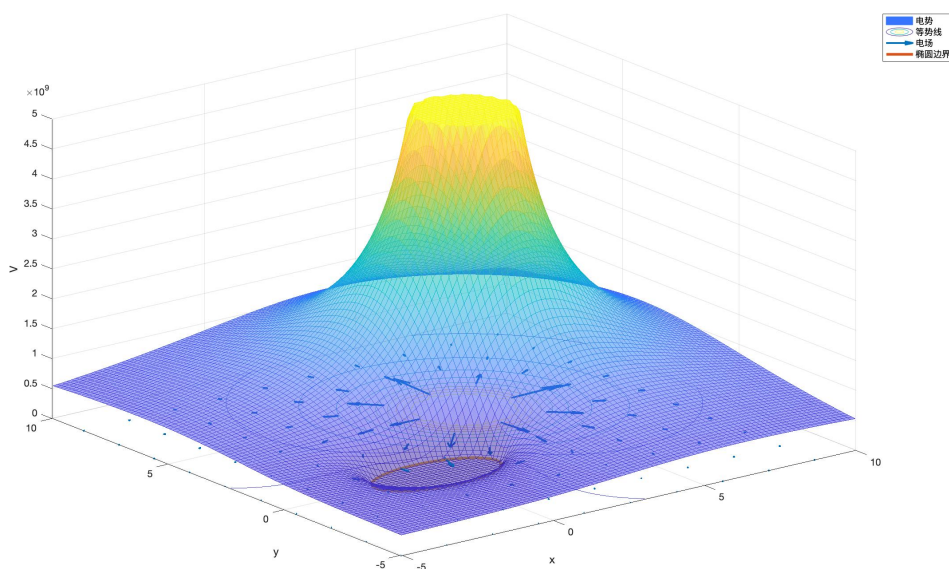


图 2: 2.4 中的例子

所以,虽然椭圆边界-外电荷体系不能直接用镜像法求解,但是可以通过 Joukowski 逆变换间接使用镜像法求解。

2.5 保角变换拓展

保角变换除开在静电问题中的应用之外,在新兴的变换光学中也有着很多的应用,我们研究了非静电情形下的保角变换。

首先我们思考了一下保角变换对于介电常数和磁导率的影响。这一点是很容易想到的,因为保角变换对于空间而言进行了一番扭曲与形变。

为了保证 Maxwell 方程在坐标变换下的协变性,变换前后的张量应满足如下关系:

$$\begin{cases} \epsilon^{i'j'} = \det(\Lambda)^{-1} \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} \epsilon^{ij} \\ \mu^{i'j'} = \det(\Lambda)^{-1} \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} \mu^{ij} \end{cases}$$

其中 Λ 为坐标变换的 Jacobi 矩阵, $\Lambda_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ [1]。

以上文所述的保角变换为例, $z = x + iy$ 变换至 $w = u + iv$, 其 Jacobi 矩阵可以写成:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

将其代入上面的式子,利用爱因斯坦求和约定,在二维情形下, i, j 取 1 和 2, 分别代表分量 x 和 y 。

我们取 $\epsilon^{1'2'}$ 为例算一下

$$\begin{aligned}\epsilon^{1'2'} &= \det(\Lambda)^{-1} \Lambda_i^{1'} \Lambda_j^{2'} \epsilon^{ij} \\ &= [(\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial v}{\partial x})\epsilon_{11} + (\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial v}{\partial y})\epsilon_{12} + (\frac{\partial u}{\partial y})(\frac{\partial v}{\partial x})\epsilon_{21} + (\frac{\partial u}{\partial y})(\frac{\partial v}{\partial y})\epsilon_{22}] \\ &\quad / [(\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial v}{\partial y}) - (\frac{\partial u}{\partial y})(\frac{\partial v}{\partial x})]\end{aligned}$$

保角变换要求复变函数解析，故存在 C-R 条件

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

其中下标表示求导时的自变量，则有：

$$\epsilon^{1'2'} = [(\frac{\partial v}{\partial x})(\frac{\partial v}{\partial y})(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) + (\frac{\partial u}{\partial x})^2\epsilon_{12} - (\frac{\partial u}{\partial y})^2\epsilon_{21}] / [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2]$$

其他的分量计算同理。

所有计算完成后会发现如果满足以下条件

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} = -\epsilon_{21} \end{cases}$$

则会得到

$$\epsilon_{i'j'} = \epsilon_{ij}$$

也就是说变换前后的介电常数不变，磁导率也是同样的道理。

这个结论的意义是很广泛的，在电动力学中讨论的大多是各向同性的材料，而各向同性的材料的介电常数张量是对应一个主对角线上的元素相等的对角阵，显然满足上面的要求。

所以可以得到如下的结论，对于一般的各向同性介质，在二维情形下做保角变换，变换前后的介电常数和磁导率都是保持不变的。这一点能够进一步说明为什么我们在上面处理问题时不必考虑介电常数的改变，尽管在直观上看我们将一个椭圆“压缩”成了一个圆，背景空间似乎发生了较大的变化。

但在三维情形下则不然，三维体系并不存在一个像二维体系那样的复变函数体系与之对应，也就不存在我们化简上式所必须的 C-R 条件。

然而在三维情形下，共形变换被广泛运用在变换光学中，其原因恰恰在于变换前后的介电函数和磁导率会发生变化，由于在三维平直空间中中存在很多的不可解问题，而利用共形变换将其变换至扭曲空间之后便会变成可解问题，而如果我们将在平直空间中塞入我们设计好其介电函数和磁导率的材料，可让其变换后在扭曲空间拥有方便我们解的介电函数、磁导率和相应的几何形状。

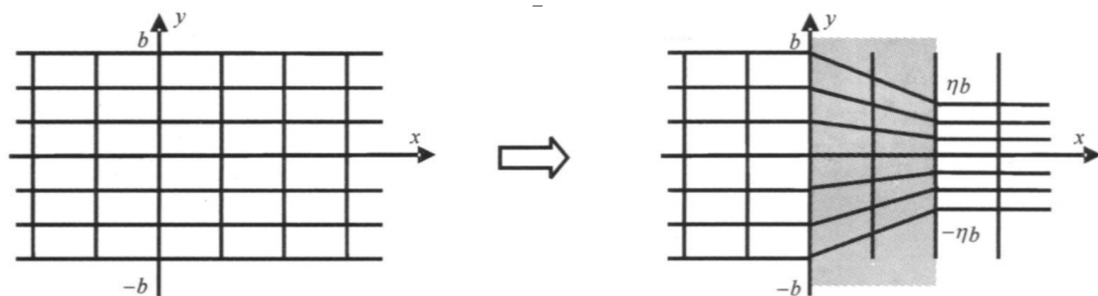


图 3: 变换光学举例

上图是一个例子，中间的灰色介质就是人为设计的一个介质，这个介质的效果就相当于变换后的光束被压缩，正如灰色背景的网格所显示的那样，这样就实现了一个光束的压缩，正是三维共形变换帮助设计材料的应用。[2]

3 二维情况下的 COMSOL 模拟

椭圆边界因为其对称性不够，求其解析解是非常难的，所以我们尝试了一下 COMSOL 模拟。

3.1 模拟真实物理场

我们采用的第一种方式是模拟真实的物理场，基本思路是将椭圆接地并在椭圆的外部放置一个线度上远小于椭圆边界的圆，让这个圆带上电量为 q 的电荷，由于线度很小，所以其近似为一点电荷。

同时我们在整个体系的外圈再加一个线度远大于椭圆的圆形边界，令其接地，模拟无穷远处的情形。

最终得到的结果如下面的图所示。

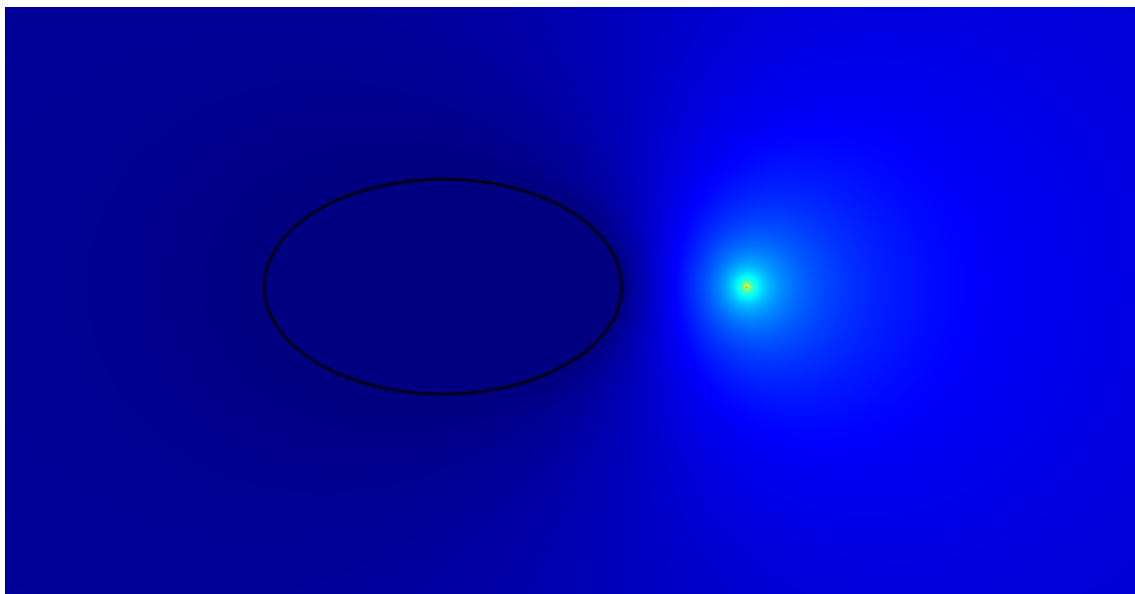


图 4: 物理场模拟——表面

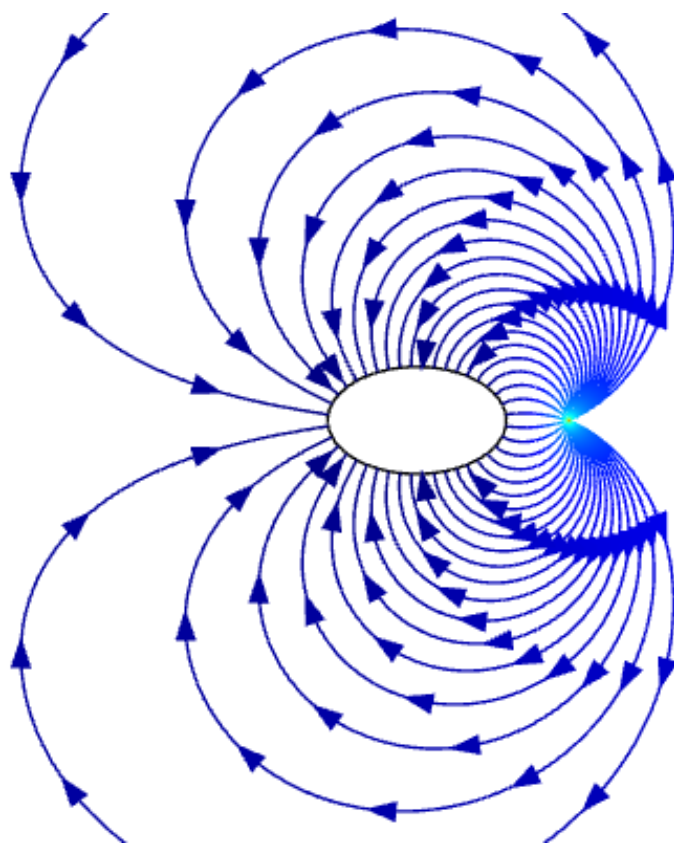


图 5: 物理场模拟——流线上箭头

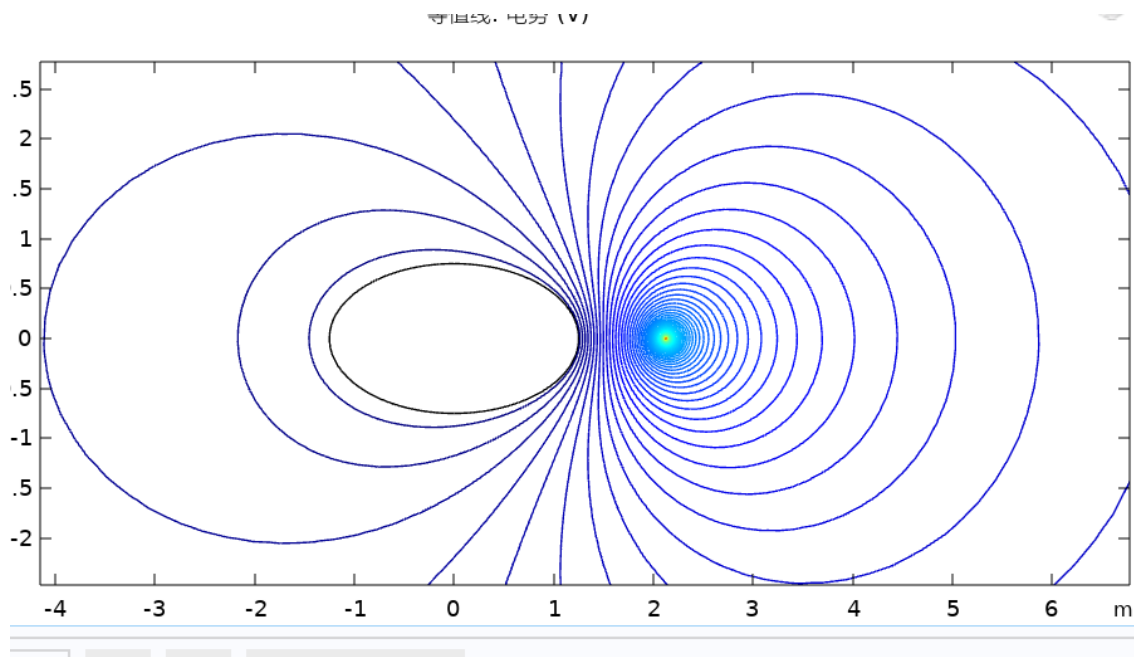


图 6: 物理场模拟——等值线

3.2 用 COMSOL 数值求解泊松方程

除了真实的物理场模拟之外，我们还尝试了用 COMSOL 直接针对泊松方程进行数值求解，与物理场的设置大体相似，但在数值求解问题中我们直接设置了一个点电荷，而不使用极小的圆来近似。

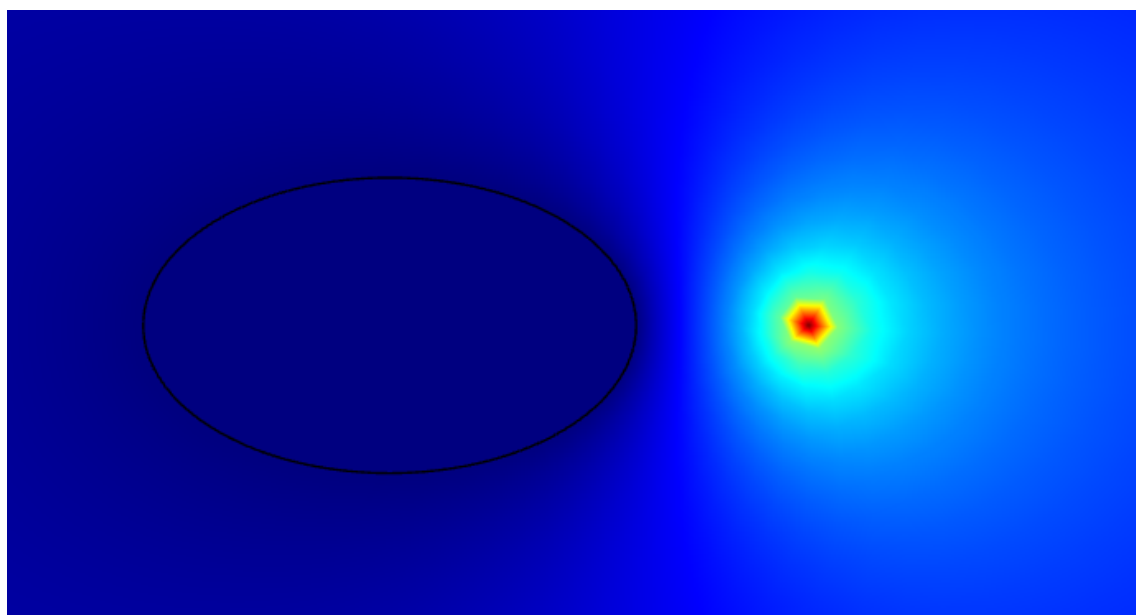


图 7: 数值解——表面

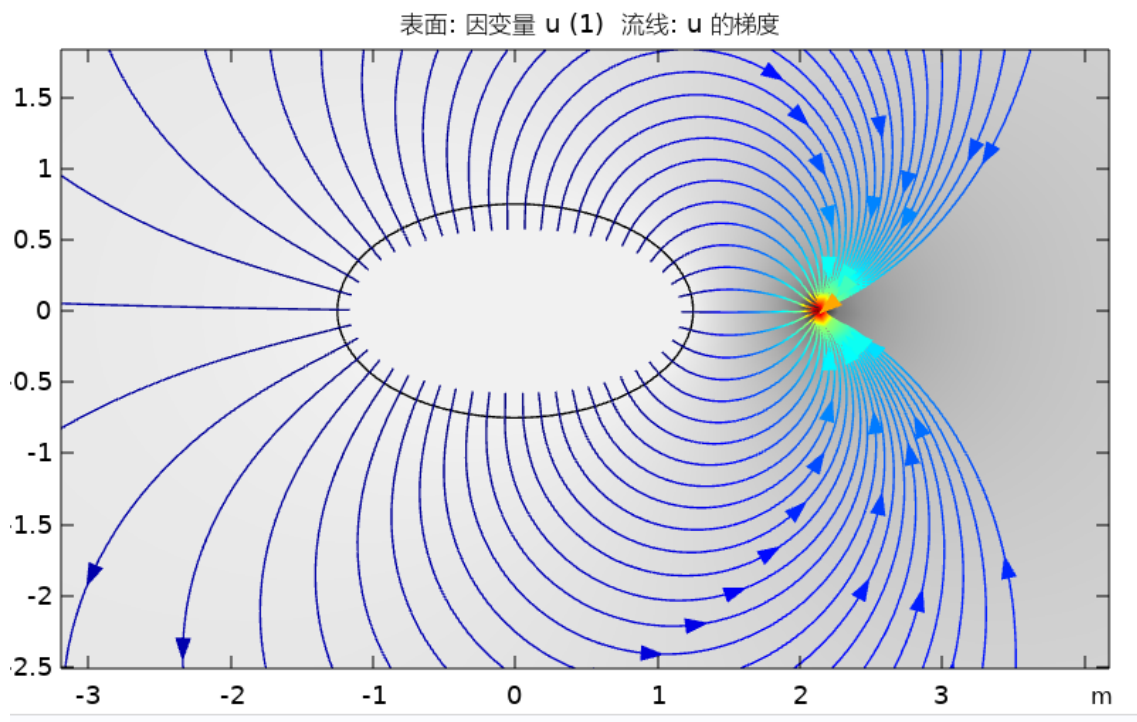


图 8: 数值解——流线上箭头

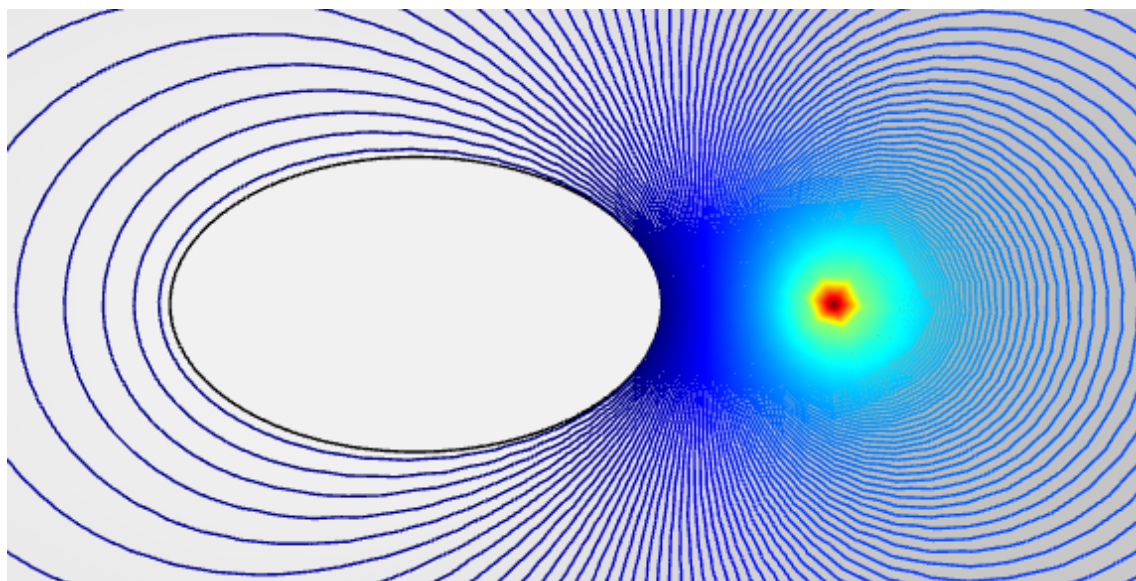


图 9: 数值解——等值线

比较可以明显看出在真实物理场模拟中尽管使用了线度较小的圆，但还是比不上数学模型中点电荷的电势极值。不过两者总体上差别不大。

3.3 COMSOL 数值结果与保角变换解的比较

COMSOL 中可取二维截线，将线上的数据全数导出，并最终同保角变换所得结果在 MATLAB 中作图得到结果。可以进行比较。

首先取 y 轴：

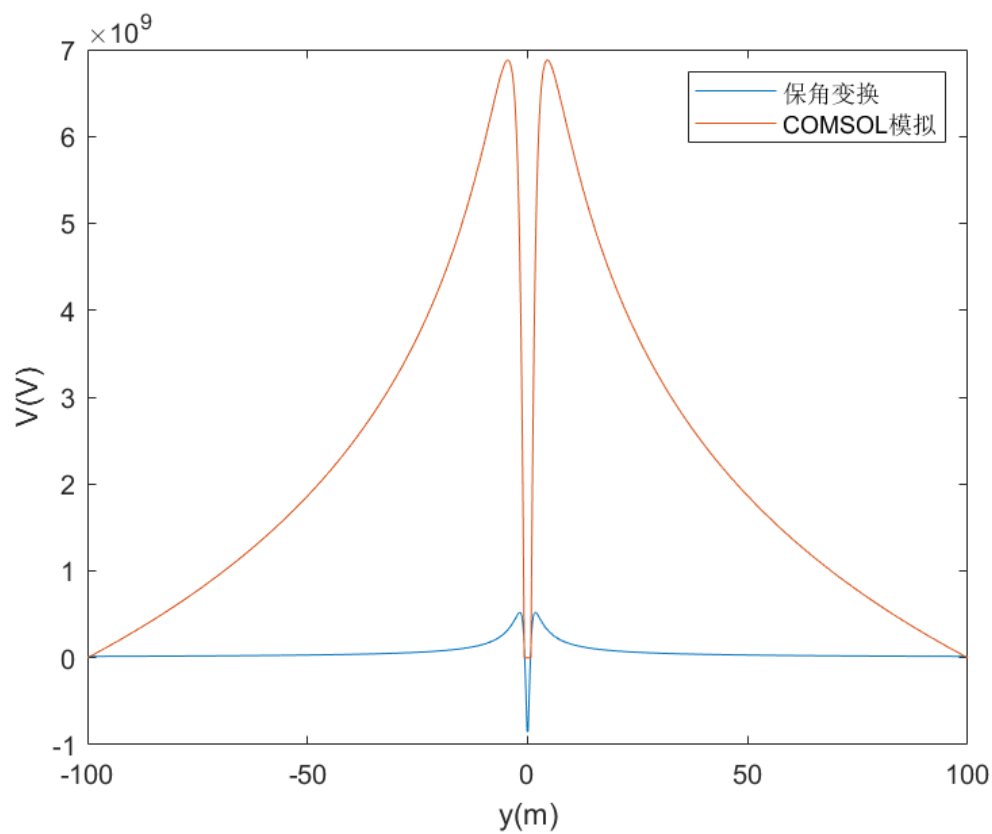


图 10: y 轴上的对比

之后取的是 x 轴：

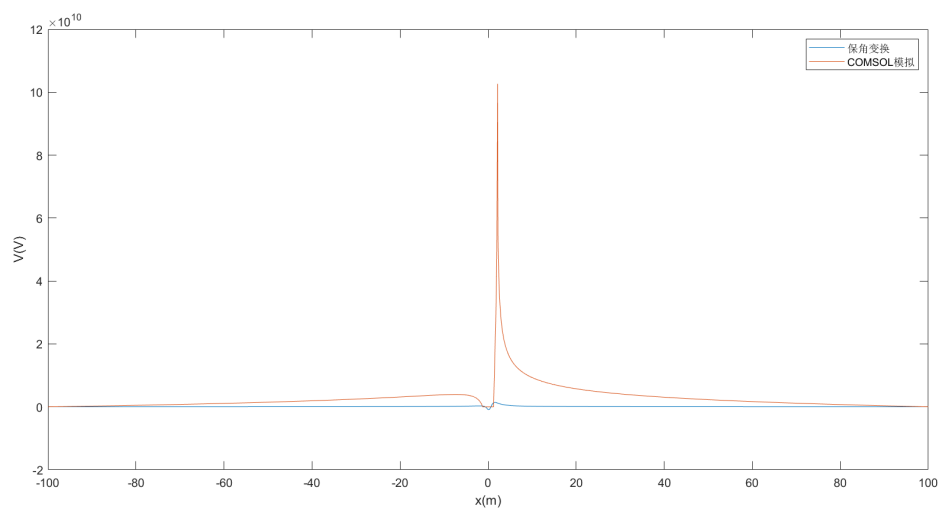
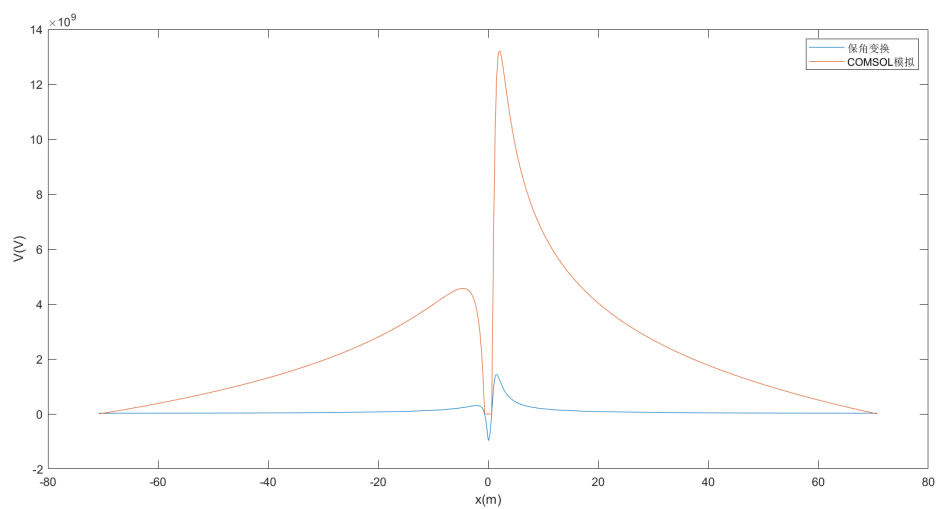


图 11: x 轴上的对比

最后取了直线 $y = x$:

图 12: 直线 $y = x$ 上的对比

可以明显的看出，虽然在变化趋势上相同，但 COMSOL 的值比保角变换的值要大的多，这是 COMSOL 设置调整的问题，尚待解决，为了说明 COMSOL 的确存在类似问题，我们用解析解很确定的圆边界来做对照可以得到下图。

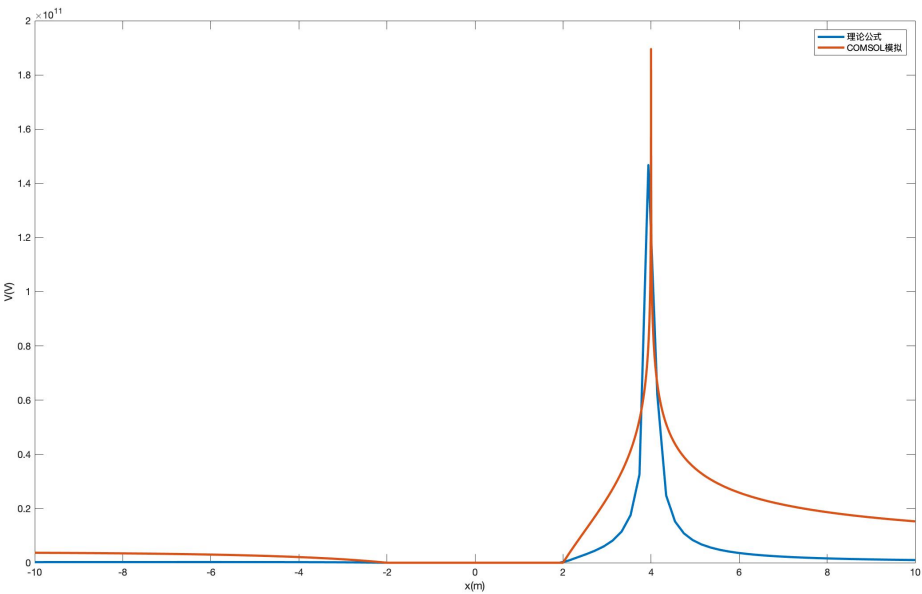


图 13: 圆边界对比图

这一点我们推测是 COMSOL 的无穷远点出现了问题，在设置时为了让问题有一个类似无穷远的边界，我们采用了设置一个大的几何边界并令其接地来进行模拟，现在看来这个方法并不完全正确。

其原因是这个问题的收敛过慢，无论我们加的外边界的线度有多大，都会对其造成极大的影响。

之后，我们将保角变换和 COMSOL 模拟的等势线图进行了对比，结果如下：

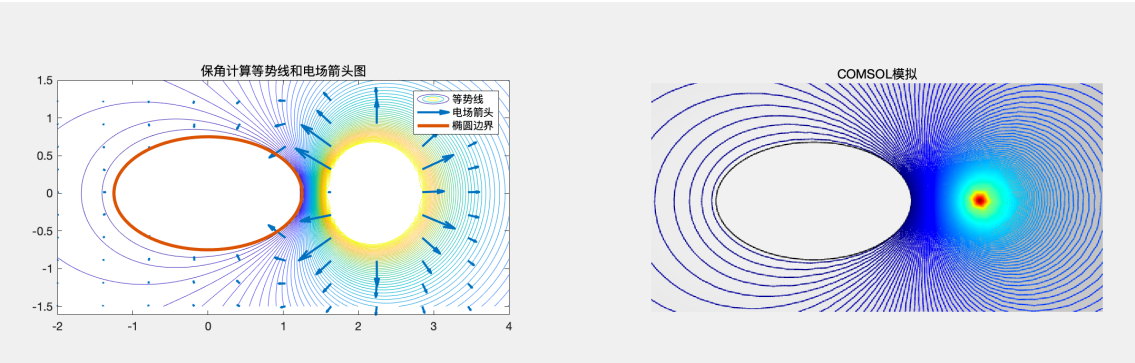


图 14: 等势线对比图

4 总结

这次的小课题主要结论如下：

1. 一个点电荷放在椭圆边界旁边无法使用镜像法求解；
2. 对于椭圆边界的问题由于其对称性不够，无法直接解泊松方程得到解析解，但可以通过保角变化转化为圆边界的问题得到解析解；
3. 保角变换对于二维的各向同性介质不会对介电常数和磁导率产生影响和改变，但三维的共形变换则不具备此特性；
4. COMSOL 模拟的结果和保角变换的结果在趋势上一致，但 COMSOL 计算的值都更大，推测是无穷远外围边界条件设置的问题。

参考文献

- [1] Schurig D, Pendry J B, Smith D R. Calculation of material properties and ray tracing in transformation media[J]. Optics express, 2006, 14(21): 9794-9804.
- [2] 王如龙, 莫玲芝, 张锦. 应用变换光学理论调控电磁场光束束宽 [J]. 强激光与粒子束, 2011, 23(03): 632-636