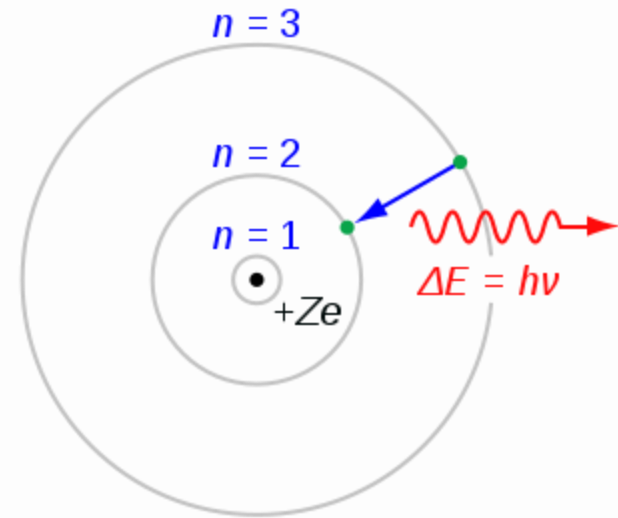




JULY 1913.

玻尔原子模型

汇报人：蔡浩舟 19307110003



*On the Constitution of Atoms and Molecules.
By N. BOHR, Dr. phil. Copenhagen*.*

Introduction

- Problems:
- 按照经典电动力学，卢瑟福模型无法解释原子的稳定性
- 一个方程，两个未知数： $4\pi^2 m_e \omega^2 r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
- Solutions:
- 当时考虑这类问题的方法有了根本性的改变：黑体辐射、光电效应、X射线的解释都用到了量子化的概念和普朗克常数 h ，经典电动力学不足以解释原子尺度系统的行为。
 - 能否在解释原子结构时也引入量子化的概念？

Part I: Binding of Electrons by Positive Nuclei

经典电动力学不能解释（卢瑟福模型）原子的稳定性

- 假设电子加速运动没有辐射电磁波
- 记 $-e$ 、 m 为电子电量、质量， E 为原子核电量， W 为把电子移到无穷远处需要的最小能量（电离能），也就是电子机械能的相反数（未知），采用高斯单位制，势能 $U = -\frac{Ee}{r}$

1. 电子绕原子核运动的频率： $\omega = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{W^{\frac{3}{2}}}{eE\sqrt{m}}$

2. 椭圆轨道长轴长： $2a = \frac{eE}{W}$

3. 电子动能的时间平均值： $\langle T \rangle = W$

- 位力定理： $\langle 2T \rangle = \langle \vec{r} \cdot (\nabla U) \rangle = \left\langle r \frac{dU}{dr} \right\rangle = -\langle U \rangle$

$$\langle -W \rangle = \langle T \rangle + \langle U \rangle = -\langle T \rangle$$

$$\langle T \rangle = \langle W \rangle = W$$

基本假设

- 为了简单，假设电子的质量和核的质量相比是小得可以忽略不计的，电子的速度远小于光速，轨道是圆形的
- 刚开始与原子核相互作用时，电子离原子核很远，且绕转频率 $\omega_0 = 0$ ；与原子核相互作用后，电子停留在一个定态轨道
- 在电子被捕获时，发出一种单色辐射，频率为 ν （是电子在最终的定态轨道运动的频率 ω 的一半）
 - 根据普朗克的理论，辐射的能量等于 $\tau h \nu$ ， h 为普朗克常数， τ 为一个整数
 - $W = \tau h \frac{\omega}{2}$

$$\bullet \begin{cases} W = \tau h \nu = \frac{\tau h \omega}{2} \text{ (量子化假设)} \\ \omega = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{W^{\frac{3}{2}}}{e E \sqrt{m}} \text{ (经典力学)} \\ 2a = \frac{e E}{W} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W = \frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{\tau^2 h^2} \\ \omega = \frac{4\pi^2 m e^2 E^2}{\tau^3 h^3} \\ 2a = \frac{\tau^2 h^2}{2\pi^2 m e E} \end{cases}$$

- 不同的整数 τ 对应于不同的组态，可以得到不同的 $W, \omega, 2a$
- 当 $\tau = 1$ 时， W 最大，把电子移到无穷远处需要的能量最大，对应于系统最稳定的状态
- 初步验证：

$$\bullet \begin{cases} e = 4.7 \times 10^{-10} \text{esu} \\ \frac{e}{m} = 5.31 \times 10^{17} \text{esu/g} \\ h = 6.5 \times 10^{-27} \text{g} \cdot \text{cm}^2/\text{s} \\ \text{令 } \tau = 1, E = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1.1 \times 10^{-8} \text{cm} & \sim \text{原子线度} \\ \omega = 6.2 \times 10^{15} \text{s}^{-1} & \sim \text{光频率} \\ \frac{W}{e} = 13 \text{V} & \sim \text{电离势} \end{cases}$$

主要假设

- 电子在定态轨道上的运动可以用经典力学解释，但在不同定态轨道之间的过渡不能用经典力学解释
- 电子在不同轨道之间的过渡伴随着单色辐射，辐射的能量和频率之间的关系遵循普朗克的理论

氢原子光谱

- 氢原子由一个电量为 $-e$ 的电子和一个电量为 $E=e$ 的原子核组成

$$W = \frac{2\pi^2 m e^4}{\tau^2 h^2}$$

- $\tau = \tau_1 \rightarrow \tau = \tau_2$ 辐射的能量:

$$W_{\tau_2} - W_{\tau_1} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right)$$

- 辐射能量为 $W_{\tau_2} - W_{\tau_1} = h\nu$

$$\frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right) = h\nu$$

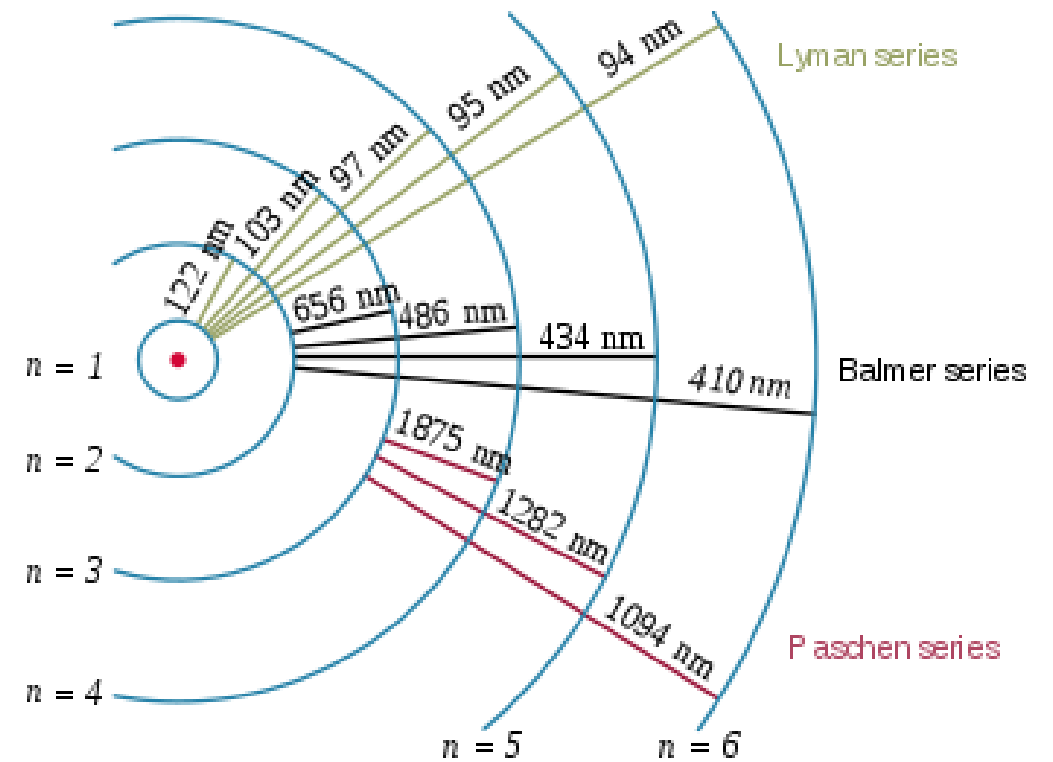
$$\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right)$$

- $\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right)$

- $\tau_2 = 3$, Paschen系(1885)
- $\tau_2 = 2$, Balmer系(1908)
- $\tau_2 = 1$, 紫外线(expected)
- $\tau_2 = 4, 5, \dots$, 红外线(excepted)

- 系数 $\frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} = 3.1 \times 10^{15} s^{-1}$

- 当时的测量值为 $3.290 \times 10^{15} s^{-1}$



From: https://en.wikipedia.org/wiki/Hydrogen_spectral_series

进一步讨论

- “不同的定态对应于不同数目的单色能量子的发射” 不太可能成立
 - 一旦有一个能量子被发射，频率就会改变
- 可以在更一般的假设下，仍然得到相同的结果
- 辐射的能量 $W = \tau h \frac{\omega}{2} \rightarrow W = f(\tau) \cdot h\omega$
- $$\begin{cases} W = f(\tau) \cdot h\omega & (\text{量子化假设}) \\ \omega = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{W^{\frac{3}{2}}}{eE\sqrt{m}} & (\text{经典力学}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2h^2 f^2(\tau)} \\ \omega = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2h^3 f^3(\tau)} \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} W = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2 h^2 f^2(\tau)} \\ W_{\tau_2} - W_{\tau_1} = h \nu \end{cases} \Rightarrow \text{辐射频率 } \nu = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2 h^3} \left(\frac{1}{f^2(\tau_2)} - \frac{1}{f^2(\tau_1)} \right)$$

- 为了得到与Rydyberg公式相同的形式，必须 $f(\tau) = C\tau$

$$\nu = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2 C^2 h^3} \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right)$$

- 为了确定C，考虑两个相邻的定态 $\tau_1 = N$ 和 $\tau_2 = N - 1$ 之间的过渡

$$\text{辐射频率 } \nu = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2 c^2 h^3} \frac{2N-1}{N^2(N-1)^2}$$

$$\text{绕转频率 } \omega_N = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2 c^3 h^3 N^3}, \omega_{N-1} = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2 c^3 h^3 (N-1)^3}$$

- $N \rightarrow \infty, \omega_N = \omega_{N-1}, \nu = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2 c^2 h^3} \frac{2}{N^3}$; 由经典电动力学，辐射频率 $\nu' = \omega_N$

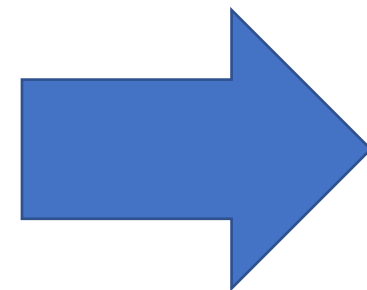
- 对应原理: $\nu = \nu'$ 即 $\nu = \omega_N$

$$C = \frac{1}{2}$$

- 回到了最初的假设 $W = \tau h \frac{\omega}{2} = h \left(\tau \frac{\omega}{2} \right)$

角动量量子化

- 若以上讨论没有问题， $\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right)$ 应该是一个精确的公式，应与实际完全符合，对 e, m, h 的实验测量结果有价值。
- 电子角动量为 M ，绕转频率为 ω ，动能为 T ，由经典力学：
- $M = \frac{T}{\pi\omega} = \frac{\langle T \rangle}{\pi\omega} = \frac{W}{\pi\omega} = \frac{\tau h}{2\pi}$
- $\begin{cases} M = \tau M_0 \\ M_0 = \frac{h}{2\pi} = \hbar = 1.04 \times 10^{-27} \text{g} \cdot \text{cm}^2/\text{s} \end{cases}$



Part II: Systems Containing Only A Single Nucleus

1. 普遍假设

- 认为原子是通过原子核一个一个捕获电子而形成的
- 电子环，角动量的普适恒定性假说

2. 体系的组态和稳定性

- 经典力学讨论各种电子组态的力学稳定性

3. 包含很少电子的原子结构

- 氢、氦、锂、铍的原子结构
- 各电子轨道半径和结合能

4. 包含较多电子的原子结构

5. 特征伦琴射线

6. 放射性现象

- 指出了放射性现象不是起源于原子核外的电子组态，而是起源于原子核本身的内部结构，指出了 α 粒子、 β 粒子都是从核的内部发出的，解释了刚发现不久的放射性位移定律。

Part III: Systems Containing Several Nuclei

- 分子的结构
- 氢分子的模型
- 论证了两个氢原子为什么不能结合成分子
- CH_4 分子的结构

卢瑟福在 1913 年 3 月 20 日回了信*：

亲爱的玻尔博士：

我已经安全地收到你的论文并抱着很大的兴趣读过了，但是当有更多的闲暇时我将再仔细阅读一遍。你的关于氢光谱的起源方式的想法是很巧妙的，而且看来也是很好用的；但是，普朗克概念和旧力学的混合却使人很难对什么是它的基础形成一个物理概念。在我看来，你的假说中有一个严重的困难，这个困难我毫不怀疑地认为你也充分意识到了，那就是，当电子从一个定态过度到另一个定态时，它怎么决定将以什么频率来振动呢？在我看来，你似乎必须假设电子事先就知道它将在什么地方停下来。

对于论文的布局，我也想提个较小的意见。我想，你在力求清晰的同时，有一种把论文写得太长的倾向，以及一种在论文的不同部分重复你的叙述的倾向。我认为你的论文实在需要精简，而且我认为这是可以在不牺牲任何清晰性的条件下做到的。我不知道你是否意识到，太长的论文会把读者们吓住，他们觉得没那么多时间去泡在里边。

Thanks for your attention!

References:

1. Bohr, N., *I. On the constitution of atoms and molecules*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1913. **26**(151): p. 1-25.
2. Bohr, N., *LXXIII. On the constitution of atoms and molecules*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1913. **26**(155): p. 857-875.
3. Bohr, N., *XXXVII. On the constitution of atoms and molecules*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1913. **26**(153): p. 476-502.
4. 玻尔, 罗森菲尔德, 戈革, *尼耳斯·玻尔集: 1912-1917. 第二卷. 关于原子物理学的著作*. 2012: 华东师范大学出版社.
5. 戈革, *伟大的三部曲——为纪念N.玻尔《论原子构造和分子结构》一文发表七十周年而作*. 华东石油学院学报(物理学史), 1984(S1): p. 1-16.