

链珠喷泉

组员：万臻 麻一州 冯睿骐 励兵斌 郑开新

1 问题概述

如果一条珠链（由许多球状小珠组成，小珠之间用刚性棒连接（图 1.1））堆成一堆放在高处，拉起珠链的一端并使之垂落，珠链并不只是简单地从容器边缘“流”向地面，而会先向上运动一段距离再下落（图 1.2），仿佛一个喷泉。

我们被这个奇特的现象吸引，并进行了探究。经过探讨和查阅资料，我们认为，喷泉产生的原因是：由于珠链的刚性，桌面会对空中的一段珠链施加作用力。在现有文献的基础上，我们还提出了一个修正的思路，根据此思路给出的预测值更符合实验的结果。

2 我们的实验

我们将一段合适长度的珠链装在玻璃杯里来限制珠链的大幅度移动，将珠链一端拉起并使之坠落使“喷泉”现象出现，在“喷泉”的高度较稳定时进行了测量。

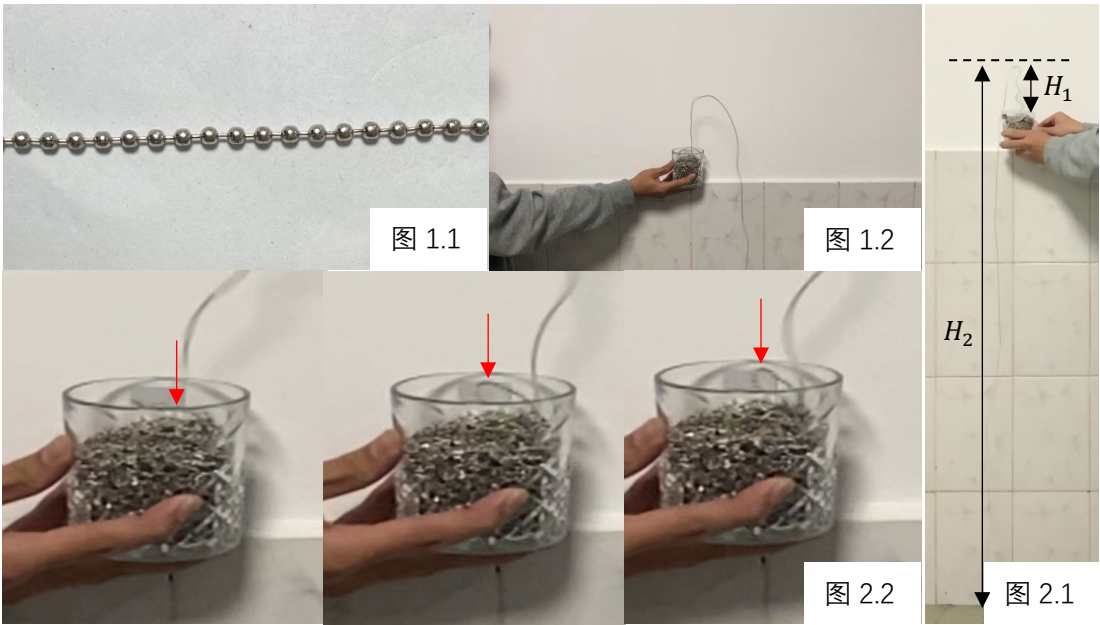
2.1 现象观察

我们观察到了前述的喷泉现象（图 2.1），但是喷泉现象并不完美，“珠链喷泉”的高度会有所波动，且由于珠链在放置过程中打结，会出现一大团珠链在短时间内喷出的现象（图 2.2）。但稳定时“喷泉”的高度变化不大。

2.2 数据测量

在修正拍照视角带来的畸变后，我们在 tracker 软件中利用瓷砖的长度（0.3m）作为参照，计算珠链喷泉的高度。我们测量了“喷泉”的最高点到珠链起始位置的高度差 H_1 （图 2.1）和珠链的起始位置与地面的高度差 H_2 （图 2.1）。

测量得到： $H_1 = 0.162m$ ， $H_2 = 1.453m$



3 理论解释

在分析中,假设绳子形状简单,除了顶端一小段弯曲,其他部分伸直(图 3.1)。珠链的速率记为 v ,珠链的线密度记为 λ ,每个珠子的质量记为 m ,每两个珠子之间短刚性绳的长度记为 b 。链上张力、受重力、支持力和高度的符号参见图中标示。

3.1“软绳”模型与此模型的问题

我们先尝试用较简单的模型对此现象进行了分析。我们将珠链看作软绳,因此假设桌面的支持力就是静止堆在桌面上的珠链的重力。

利用牛顿第二定律对在空中的一段绳子进行受力分析(图 3.1),可得:

$$T - F_{T_1} - \lambda H_1 g = 0 \quad (1)$$

对正在转弯的一段绳(图 3.2)取微元进行分析:由于曲率半径 ρ 很小,可认为绳中张力远大于绳元重力,即 $\lambda \frac{v^2}{\rho} \Delta\theta \gg \lambda g \Delta\theta$ 。利用牛顿第二定律 $\lambda \frac{v^2}{\rho} \Delta\theta = \lambda g \sin\theta \Delta\theta + 2T \sin \frac{\Delta\theta}{2}$, 略去 $\lambda g \sin\theta$ 项和高阶小量可得:

$$T = \lambda v^2 \quad (2)$$

即正在转弯的绳子上拉力处处相等。

分析即将被拉动的一段绳元:从静止到被拉动并加速到 v 的一小段时间 Δt 内,由动量定理有 $\lambda v^2 \Delta t = -v g (\Delta t)^2 + F_{T_1} \Delta t + N \Delta t$ 。采取前述假设,取 $N = 0$,并略去高阶小量可得:

$$F_{T_1} = \lambda v^2 \quad (3)$$

将(2)(3)代入(1),可得:

$$H_1 = 0$$

即软绳不能产生“喷泉”现象。这与我们的生活经验相符。

可以看出,采取“软绳”假设得出的结论和实际情况并不相符。从分析过程可以看出,要让“喷泉”产生,桌面需要对空中的珠链有支持力 N 。

3.2“短棒”模型的解释

为了研究桌面对珠链的支持力,结合珠链之间的夹角存在上限(图 3.3)的特性,J.S.Biggins 和 M.Wartner 将珠链建模为许多相连的短棒,它们之间的角度达到某一最大值时,就会产生刚性。当研究的对象中所有相邻短棒间的夹角达到这一最大值时,多根短棒就固连形成一个刚体,称作“短棒”。

3.2.1 对“短棒”的分析

分析即将被拉动的一小段珠链时,我们认为这一小段珠链一端水平,一端竖直(图 3.4)。测量得到珠链弯曲的最大角度约为 30° ,即这一小段的珠链约包含 3 个珠子。因为它们在被拉动的一段小段时间内不能相对转动,所以这三个珠子构成一个刚性的“短棒”。

对“短棒”分析(图 3.4)。考察这三个珠子从静止到被带动开始运动的过程,设其时间为 Δt 。由动量定理可得:

$$3mv = (\overline{F_{T_1}} + \overline{N}) \Delta t \quad (4)$$

$$\text{其中 } \overline{F_{T_1}} = \frac{\int F_{T_1} dt}{\Delta t}, \quad \overline{N} = \frac{\int N dt}{\Delta t}。$$

又因为 $\Delta t = \frac{3b}{v}$, $\lambda = \frac{m}{b}$, 带入可得:

$$\overline{F_{T_1}} + \overline{N} = \lambda v^2 \quad (5)$$

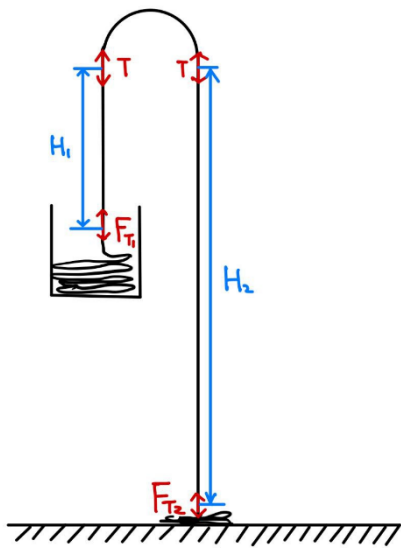


图 3.1

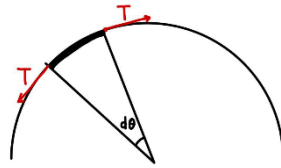


图 3.2



图 3.5

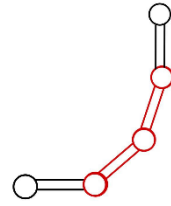


图 3.3

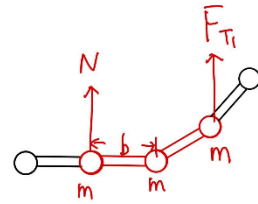


图 3.4

“短棒”在开始被带动的时刻与桌面平行（图 3.5）。在这一时刻利用角动量定律和牛顿第二定律可得：

$$I\beta = F_{T1}b - Nb \quad (6)$$

$$3ma_c = F_{T1} + N \quad (7)$$

其中角加速度 β 以纸面向外为正， a_c 为“短棒”质心的加速度， $I = 2mb^2$ 为这个时刻“短棒”对质心的转动惯量。由于加速的时间很短，分析时认为珠链刚开始加速时的受力大小近似等于加速全过程受力大小的平均值，即 $F_{T1} \approx \overline{F_{T1}}$ ， $N \approx \overline{N}$ 。

当三个珠子开始转动时，由于最左面的珠子和桌面接触，由约束关系可得：

$$\beta b = a \quad (8)$$

联立公式（4）～（8）可得：

$$N = \left(\frac{1}{2} - \frac{I}{6mb^2}\right)\lambda v^2$$

$$F_{T1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{I}{6mb^2}\right)\lambda v^2$$

这个物理过程和从桌子上迅速拉起棍子的一端时的情况相似：由于物体的刚性与角加速度的存在，棍子远离受力点的一端会受到桌子的额外支持力。这一点与从 $v=0$ 开始运动的软绳不同。

3.2.2 对空中绳子的分析

分析左侧在空中上升的绳子。将 F_{T1} 带入 3.1 节中(1)式，并利用 $I = 2mb^2$ 可得：

$$H_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{I}{6mb^2}\right)\frac{v^2}{g} \approx 0.167 \frac{v^2}{g} \quad (9)$$

分析右侧在空中下落的一段绳子（图 3.1）。由牛顿第二定律可得：

$$T - \lambda H_2 g - F_{T2} = 0 \quad (10)$$

值得注意的是，这里的 F_{T2} 并不适合利用前面的“短棒”模型进行估算。我们进行了实验，从同样高度释放两根同样长度的珠链，一根自由下落，另一根的下端堆积在桌面上（图 3.6）

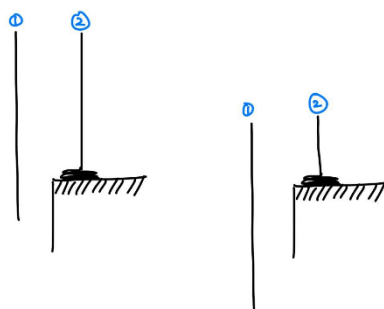


图 3.6

我们观察到珠链上端下落的速度几乎相等。这意味着，下落的绳子和桌面的作用机理不应该用“短棒”进行描述。在我们的分析中，由于实验结果的支撑，可以认为 $F_{T_2} = 0$ 。代入公式 (10) 可得

$$H_2 = \frac{v^2}{g} \quad (11)$$

3.2.3 理论值和实验结果的对照

于是，我们可以利用 H_1 与 H_2 消去 v^2 ，得到便于测量的量 $\frac{H_1}{H_2}$ ，记为 α 。

利用 (9) 式和 (11) 式，可得到由“短棒”模型给出的 α 的理论值 $\alpha = \frac{1}{6} \approx 0.167$ ；我们的实验测得的数据得出 α 的测量值为 $\alpha \approx 0.111$ 。可见，“短棒”模型可以解释“喷泉”的现象，但是存在一定的误差。

3.2.4 “短棒”模型的改进

由于刚性的产生需要“珠链短棒”之间的产生夹角，而“短棒”模型认为三个珠子在一条直线上，此处产生了一定偏差。

我们对此提出了一种修正：产生刚性需要珠链之间产生 30° 的夹角（见图 3.5）。据此计算可得转动惯量 $I' = 1.910mb^2$ ， F_{T_1} 和 N 的平均力臂 $b' = 0.93b$ 。替换公式 (8) 中的 I 与 b 得：

$$H_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{I'}{6mb'^2} \right) \frac{v^2}{g} = 0.132 \frac{v^2}{g} \quad (12)$$

由于 H_2 不受影响，利用前述公式 (9)，结合公式 (12)，得 $\alpha = 0.132$ ，和测量值 $\alpha = 0.111$ 更接近。

4 反思和讨论

4.1 可能的误差来源

我们观察到，有时“喷泉”的高度 H_1 会下降，并有时能观察到在空中的珠链会形成一个“团”（图 2.2）。我们认为这有以下两个原因：

a. 珠链在堆放过程中自行缠绕打结。而我们即使花费大量时间逐层堆放珠链，也无法完全避免珠链缠绕打结现象的出现。

b. 珠链在堆放过程中出现了反向堆叠，即在下方的珠链比在上方的珠链先被拉动。在此过程中，下方的珠链运动时会带动上方的珠链，带来能量损失，导致 H_1 的下降。因此即使没有观察到珠链形成“团”，也可能因为珠链之间的相互作用导致理论与实验之间出现偏差。

4.2 研究方法

我们认识到了团队合作的重要性。我们分工明确，在前期查阅文献时提高了效率；遇到困难时通过讨论也常常能迅速解决问题。

此外，我们也认识到数值计算的重要性，很多基于现实情况的模型十分复杂，给出解析解是困难的，灵活运用数值计算和计算机，能大大提高效率。

5 参考文献

(1) J.S Biggins and M. Warner, Understanding the chain fountain (2014)

DOI: 10.1098/rspa.2013.0689

(2) Epifanio G. Virga, Dissipative shocks in a chain fountain (2014)

DOI: 10.1103/PhysRevE.89.053201