

流体力学探究——关于旋转风帆的可行性分析

陈寅聪，董建松，王可欣，吴嘉晟，周正(按拼音首字母排序)

December 6, 2017

摘要 本文通过伯努利方程，流体中的黏滞应力公式，计算一定风速情况下旋转风帆提供的推力与收到的空气阻力的大小关系，与传统风帆进行比较，从而对旋转风帆的优缺点进行分析与讨论。

Contents

1 引言	2
2 基本原理与公式	2
3 对于滚筒风帆的计算	3
3.1 单个风帆横向推力的大小	3
3.2 单个风帆维持转动对应阻力矩大小及功率大小	4
3.3 传统风帆的情况	5
4 数值估算	5
5 滚筒风帆在应用过程中的问题	6
6 结论	6
6.1 补充	7

1 引言

滚筒风帆是一种立在船舶上，由电机驱动以一定角速度转动的滚筒。据流体力学中的Magnus效应，当有风从航向的垂直方向吹来时，转动的滚筒可以提供垂直风向、即沿航行方向的推动力。

在2016年，芬兰Norsepower公司获得260万欧元的研究资金，用于进行旋转风帆的研究。据悉，Norsepower的旋转风帆可安装于新建船舶上，也可改装安装在现有船舶上，其通过旋筒的马格努斯效应使风力产生向前的推进。第三方数据分析显示，在合适的风力条件下，船舶应用旋转风帆可以获得25%的节油效果（选取合适的服务航速）。事实上，1924年Anton Fletter 就主持改装了第一艘使用旋转风帆的船舶“Buckau”号，而“Buckau”号也成功完成了从大西洋到纽约的航程[1]。

本文希望对滚筒风帆提供的动力以及所需的能耗进行定量力学分析，并与传统风帆进行比较，研究在何种情况下滚筒风帆更为经济。

2 基本原理与公式

本文在定量计算中主要运用到Bernoulli方程以及粘滞应力公式。Bernoulli方程指出，对于定常流动的理想流体，同一细流管中每一点的压强 p 、速度 v 与高度 h 满足关系

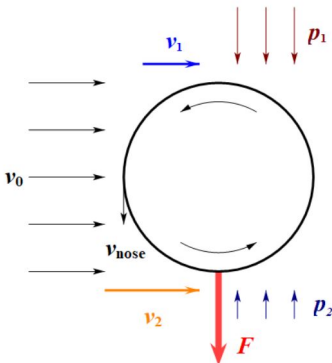
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p = \text{const.} \quad (1)$$

速度各不相同的相邻流体层之间存在与相对运动速度方向相反的粘滞力，单位面积上的粘滞力与速度梯度成正比，比例系数 η 称粘度

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{dv}{dz} \quad (2)$$

在柱坐标系下，在平面内流动的流体的横向粘滞应力分布

$$f_\theta(r) = \frac{dF_f}{dS} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \quad (3)$$

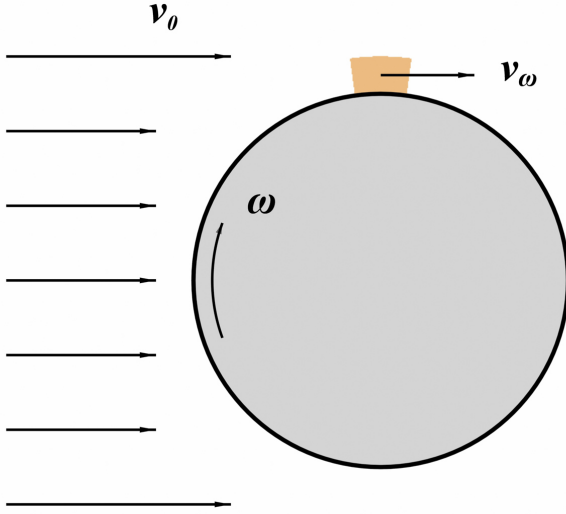


如图所示，当风吹向一个旋转的柱体或球体时，由于粘滞力的作用，柱体会带动周围的空

气运动，导致柱体两侧风速不同，由Bernoulli方程，风速较大的一边压强较小，风速较小的一边压强较大，从而产生一个沿垂直风向的合力，这一效应被称为Magnus效应。作为一个简单的判据，Magnus力的方向与柱体上迎着风的那一点的运动方向相同。

3 对于滚筒风帆的计算

3.1 单个风帆横向推力的大小



如图所示，记环流速度的大小为 v_ω ，横向风速为 v_0 ，旋转速度为 ω_0 ，圆筒半径为 R ，空气粘滞系数 η ，认为滚筒附近的空气层的环流速度与滚筒表面点的速度成正比，即 $v_\omega = A\omega R$ 。与推力相比，空气阻力导致运动方向阻力很小，所以暂时忽略空气阻力。滚筒附近空气层的速度

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_\omega \\ &= v_0 + (v_\omega \sin\theta \mathbf{i} - v_\omega \cos\theta \mathbf{j}) \\ &= (v_0 + A\omega_0 R \sin\theta) \mathbf{i} - A\omega_0 R \cos\theta \mathbf{j} \end{aligned} \quad (4)$$

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_0^2 + A^2 \omega_0^2 R^2 + 2A v_0 \omega_0 R \sin\theta$$

在相对滚筒静止的参考系下观察，空气定常流动，由Bernoulli方程，方位角为 θ 处的压强

$$\begin{aligned} p(\theta) + \frac{1}{2} \rho v^2 &= p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \\ p(\theta) &= p_0 - \frac{1}{2} \rho A^2 \omega_0^2 R^2 - \rho A v_0 \omega_0 R \sin\theta \end{aligned} \quad (5)$$

空气对的作用力由压强对面积微元作用力对表面积分得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_M &= \oint_S p d\boldsymbol{\sigma} \\
&= \int_0^l dl \int_0^{2\pi} R \sin\theta d\theta (-p \cos\theta \mathbf{i} - p \sin\theta \mathbf{j}) \\
&= \int_0^{2\pi} \rho A v_0 \omega_0 R^2 l \sin^2\theta d\theta \\
&= \rho \pi A v_0 \omega_0 R^2 l
\end{aligned} \tag{6}$$

3.2 单个风帆维持转动对应阻力矩大小及功率大小

首先计算

$$f(r) = \eta \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) = \frac{d\omega}{dr} \tag{7}$$

由 r 至 dr 内的空气层受合力矩为零

$$f(r) \cdot 2\pi r l \cdot r = f(r + dr) \cdot 2\pi(r + dr)l \cdot (r + dr) \tag{8}$$

$$f(r)r^2 = C \tag{9}$$

即

$$\frac{d\omega}{dr} r^3 = C \tag{10}$$

所以

$$\omega(r) = a + \frac{b}{r^3} \tag{11}$$

又有边界条件

$$(\omega, r) = (A\omega_0, R), (0, \infty) \tag{12}$$

得到

$$\omega = A \frac{R^2}{r^2} \omega_0 \tag{13}$$

r 处的粘滞应力大小

$$f(r) = \eta r \frac{d\omega}{dr} = -2A\eta\omega_0 \frac{R^2}{r^2} \tag{14}$$

风帆旋转克服阻力矩

$$M = f(R) \cdot 2\pi R l \cdot R = 4A\eta\pi\omega_0 R^2 l \tag{15}$$

维持风帆运动所需的功率

$$P = M\omega_0 = 4A\eta\pi\omega_0^2 R^2 l \tag{16}$$

3.3 传统风帆的情况

考察垂直船身方向的风对传统风帆提供的动力，设帆的取向与船身夹角 θ 。假设帆是刚性的，帆对于空气只有垂直帆方向的作用力，打到帆上的空气垂直帆方向的速度降为0。

$$F_n = \frac{dp_n}{dt} = \rho S v_0 \cos\theta \cdot v \cos\theta \quad (17)$$

在船身方向的分力即风帆提供的动力

$$F_x = F_n \sin\theta = \rho S v_0^2 \cos^2\theta \sin\theta \quad (18)$$

在 $\theta = \arcsin 1/\sqrt{3}$ 时该力取得最大值，即传统风帆的动力

$$F_{\text{trad}} = F_x m = \frac{2}{3\sqrt{3}} \rho S v_0^2 \quad (19)$$

综上，在这一节中，我们得到了滚筒风帆可以提供的动力功率、维持滚筒风帆转动克服阻力所需的功率以及传统风帆可以提供的动力功率

$$\begin{aligned} P_{\text{trad}} &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \rho S v_0^2 u \\ P_{\text{rotor}} &= \rho \pi A u v_0 \omega_0 R^2 l \\ P'_{\text{rotor}} &= 4A\eta\pi\omega_0^2 R^2 l \end{aligned} \quad (20)$$

4 数值估算

我们作如下估算：滚筒半径 $R = 1.5\text{m}$ 、滚筒高度 $h = 8\text{m}$ 、传统风帆的面积 $S = 50\text{m}^2$ 、风速 $v_0 = 10\text{m/s}$ 、船速 $u = 20\text{m/s}$ 、空气密度 $\rho = 1\text{kg/m}^3$ 、空气粘度 $\eta = 2 \times 10^{-4}\text{Pa} \cdot \text{s}$ 、系数 $A \approx 1$ 。

传统风帆与滚筒风帆提供的动力功率之比

$$\frac{P_{\text{rotor}}}{P_{\text{trad}}} = \frac{3\sqrt{3}\pi Ah R^2 \omega_0}{2v_0 S} \quad (21)$$

可以看到，当转速 $\omega_0 > 4\text{rads}$ ，即是约80转/分时，滚筒风帆可以提供更大的功率。这是一个比较合理的转速。

滚筒风帆提供的动力功率与维持转动所需的功率之比

$$\frac{P}{P'_f} = \frac{\rho u v_0}{4\eta A \omega_0} \quad (22)$$

这个比例约在 10^4 左右，可见维持滚筒风帆匀速转动所需的功率是几乎可以忽略的。在搭载滚筒风帆的船舶运动过程中主要的阻力仍然来自水。取 $\omega_0 = 20\text{rad/s}$ ，即约400转/分，滚筒风帆能提

供的功率约为

$$P = 200\text{kW} \quad (23)$$

这已经和小型船舶的发动机功率相当了。

5 滚筒风帆在应用过程中的问题

1. 风速变化导致动力的不稳定。只有垂直于船身的风速才能提供有效的动力，因此滚筒风帆只能作为辅助的动力源，而不能代替发动机。
2. 滚筒质量不均匀可能导致的船身不稳定。我们可以作一个简单的估算，假设滚筒质量占船身总质量的1/5，滚筒质心偏离滚筒中心2cm，首先忽略水的阻力作用，那么由动量守恒，船身将以方向快速变化，大小为 1.6m/s^2 的加速度运动，即使考虑了水的阻力，也会带来一定程度的不稳定。
3. 滚筒造成周围空气动力性质的不稳定。我们可以看到，由滚筒带来的周围空气环流的速度已经达到了原本风速的数倍，对周围空气性质造成了极大的影响。
4. 滚筒抬高船身质心高度可能造成的不稳定。
5. 滚筒转速变化时取向的不稳定。在滚筒风帆转速变化（如启动、停止）的时候，由于角动量守恒，帆船将会逆着风帆转速变化的方向转动，当水的阻力不够大的时候，就会产生船身取向的不稳定。为解决这一问题，一个可能的解决方案是分滚筒为两层，朝着相反的方向转动以抵消风帆转动的角动量。

6 结论

在本文中，我们看到滚筒风帆利用空气对转动圆形物体的Magnus效应，产生一垂直风速的横向力，从而驱动船舶运行。我们计算了滚筒风帆的Magnus力，它提供动力的功率以及耗能的功率，我们可以看到，对小型船舶，在一个合理的转速范围内，滚筒风帆可以产生大于传统风帆动力功率，且为保持滚筒风帆，且其动力的功率可以与一小型传播的有效功率相当。滚筒风帆在小型船舶上应用的问题在于各方面的不稳定。

此外，这里有必要对计算中所用到的风速作一个补充，风速可以分为真风、船风和视风，我们在计算中所用到的风速均在船参考系下选取，即计算所用的风速均为视风。

References

- [1] 彭东升. 马格努斯效应及其在船舶上的应用[j]. 江苏船舶, 7(2):23-25, 1990.