

不同网络中的爆炸渗流与普通渗流

陈寅聪 李智杰 孙泽恩

复旦大学物理学系, 200433, 中国上海

(Dated: 2019. 6. 9)

渗流理论被认为是非平衡相变的基础性模型, 在现实网络模拟中有着重要的应用。它反映网络的连通性经过某一临界点发生改变的性质。网络的渗流特性往往会随着网络的规模、连接规则、网络布局性质改变, 而对于极端复杂的现实网络进行分析通常是非常困难的。因此, 人们常常用一些简化的网络模型进行分析, 例如随机网络、晶格网络、Bethe网络、无标度网络等。这些网络一方面能够保留复杂网络的部分性质, 另一方面又能在数值模拟及数学分析方面上大大简化。

本文对随机网络、二维正方晶格网络、二维三角晶格网络及三维立方晶格网络上的随机渗流模型及爆炸渗流模型利用计算机数值模拟与数学分析方法进行研究, 分析它们在临界点附近的行为及相变的临界指数, 指出普通渗流模型与爆炸渗流模型的异同, 并深入探讨了爆炸渗流模型的相变类型。

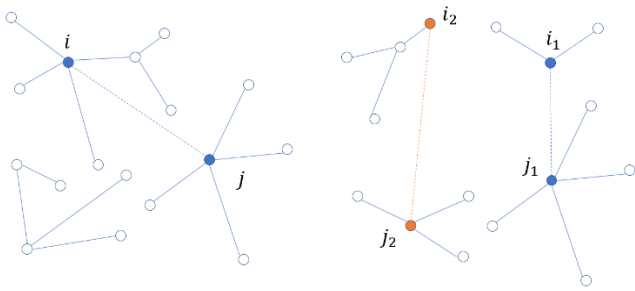
I. 引言

渗流理论(percolation theory)是图论中的一个重要的相变模型, 它表明一个网络通过一定数量的连接形成的节点集群随着连接数量出现相变现象: 相变前网络由若干较小的孤立连通分支构成, 相变后网络中出现一个巨大的连通分支。这样的网络模型在多孔介质渗透过程[1-2], 疾病传播[3-4]、网络通信[5]等领域有着重要的应用。因此, 各种类型的随机图模型及其相变问题得到了广泛的研究。研究的关键问题是: 不同相变模型之间的关系; 随机图模型相变的主要特征及其普适性问题。

2009年, Achlioptas等人发现了一种特殊的渗流模型, 称其为爆炸渗流模型(explosive percolation model), 并立即得到了广泛的关注。爆炸渗流模型是指在对连接规则进行简单的动力学修改下, 网络序参量在临界点附近产生急剧、近乎不连续的变化。Achlioptas等人

进一步指出这种渗流相变属于不连续的一阶相变[6], 与传统渗流模型完全不同, 但Dorogovtsev等人认为所谓的爆炸渗流模型仍属于二级相变的范畴内[7]。在之后的研究发现, 爆炸渗流模型在人类蛋白质同源性网络拓扑进化过程[8]、移动电话网络, 大型及小型的论文合著网络[9]等真实网络上有着重要的应用。晶格网络由于性质与随机网络不通, 因此两者在实际生活中有着不同的应用: 随机网络多用于模拟互联网、电话网络等虚拟网络; 晶格网络多用于模拟掺杂半导体、大型社区网络等网络。爆炸渗流是最近在渗流理论中新产生的概念, 在许多方面都有着值得研究的问题, 关于爆炸渗流模型的研究主要集中在如下3个方面: 构建不同类型的连接模型, 借助于数值模拟及适当的数学分析研究爆炸渗流的丰富行为, 特别是在临界点附近的临界行为, 揭示爆炸渗流的产生机制; 研究爆炸渗流所属相变类型; 研究爆炸渗流的应用。本文对随机网络、二/三维正方晶格网络、二维三角晶格网

络中的ER模型与PR模型分别进行研究并加以对比，探究普通渗流模型与爆炸渗流模型的异同，并研究它们在临界点附近的行为与临界指数。本文创新性地利用临界指数 β 与 γ 及渗流分形维度分析渗流现象，并得到爆炸渗流具有特殊的相变类型的结论；横向对比了不同网络中的渗流模型，研究网络参数对渗流模型的影响。



图一 左图为 ER 模型添加连接的方式，右图为 PR 模型添加模型的方式。在右图中， $P_1=3 \times 5=15$ ， $P_2=4 \times 4=16$ ，因此会选择 (i_1, j_1) 进行连接。

II. 随机网络中的 ER 模型与 PR 模型

随机网络 (random networks) 指的是没有中心点、不含平行边、随机生成连接边的网络。ER 模型 (Erdős & Rényi model) 是一种在网络上随机生成连接的方式，我们可以使用两种数学模型描述：设 $E_{N,n}$ 是某一具有 N 条边和 n 个顶点的网络，其中 N 条边从 $\binom{2}{n}$ 种连接 n 个顶点中任意两个的可能的边中随机地选择；对于某一具有 n 个顶点的网络，第一次从 $\binom{2}{n}$ 种连接 n 个顶点中任意两个的可能的边中随机地选择一条边进行连接，第二次从 $\binom{2}{n} - 1$ 种可能的边中随机地选择一条边进行连接……上述步骤重复 N 次。容易证明，两种数学模型是等价的，而通常来说第二种方式更容易实现，因此本文采用第二种方式构建随机网络上的 ER 模型。

PR 模型 (product rule model) 与 ER 模型稍有不同。在 PR 模型中，每次随机地选择两组顶点 (i_1, j_1) 与 (i_2, j_2) ，并计算每组顶点中各个顶点所在连通分支的大小的乘积：

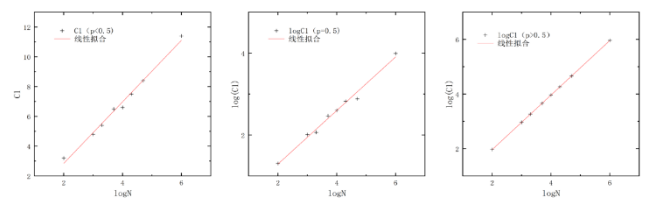
$$P_k = C(i_k) \times C(j_k), k = 1, 2$$

随后比较两个乘积的大小，并选择乘积较小的一组顶点进行连接，PR 模型与 ER 模型的连接方式如图一所示。

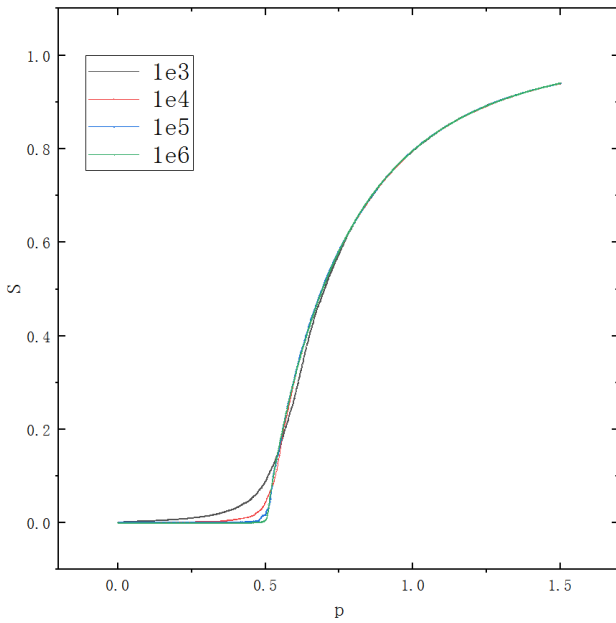
显然，PR 模型相比 ER 模型能够延缓较大的连通分支的产生，同时产生若干个大小相近的连通分支。当 p 达到临界值后，这些连通分支开始融合，能够极快地形成一个巨大的连通分支，实现爆炸渗流。

为了研究渗流的相变现象，我们重点关注序参量 $S = C_1/n$ 随边的密度 $p = m/n$ 的演化行为，式中 C_1 为网络中最大连通分支 (连通分支) 的大小，由其包含的点数表示； m 为网络当前的连接边数。数值和解析研究结果表明 ER 模型在热力学极限下，当 $p \ll 1/2$ 时， $C_1 \sim \log n$ ；当 $p = 1/2$ 时， $C_1 \sim n^{2/3}$ ； $p \gg 1/2$ 时， $C_1 \sim n$ ；其表明存在临界值 p_c ，系统的连通性质在该点处发生相变 [6]，如图二所示，实验数据与理论符合得较好。

对于 ER 模型，其相变临界值 $p_c = 0.5$ ，我们对



图二 随机网络 ER 模型中最大连通分支大小与网络大小的幂律关系。 $p < 0.5$ 时 (左图) C_1 与 $\log n$ 成线性关系； $p = 0.5$ 时 (中图)， $\log C_1$ 与 $\log n$ 成线性关系，斜率为 $k = 0.65 \pm 0.03$ ； $p > 0.5$ 时 (右图)， $\log C_1$ 与 $\log n$ 成线性关系，斜率为 $k = 0.999 \pm 0.001$ 。



图三 随机网络下 ER 模型的 S-p 图，随着网络大小增大，图像逐渐变陡并趋近于同一条曲线，临界点位置 $p_c=0.5$ 附近。

不同格点数 n 的 ER 模型进行计算模拟，图三分为 $n = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ 四种情况进行模拟。如图三所示，随着网络格点的增大，在相变点附近的临界行为发生变化。格点数越多，在 p_c 斜率变化越大，其临界行为也越显著。

对于有限连续（二阶或更高）相变系统，可以用有限标度率和临界指数描述系统在临界值附近的行为特征。对于所研究的系统， β 、 γ 是十分重要的两个临界指数，其定义为：

$$S \sim |p - p_c|^\beta$$

$$S_{avr} \sim |p - p_c|^{-\gamma}$$

其中 S_{avr} 为平均连通分支大小（除最大连通分支外）[10]。

n	β	α	γ
10^3	0.088 ± 0.003		0.0068 ± 0.0003
10^4	0.157 ± 0.004		0.068 ± 0.010
10^5	0.289 ± 0.007	0.957 ± 0.003	
10^6	0.35 ± 0.04		

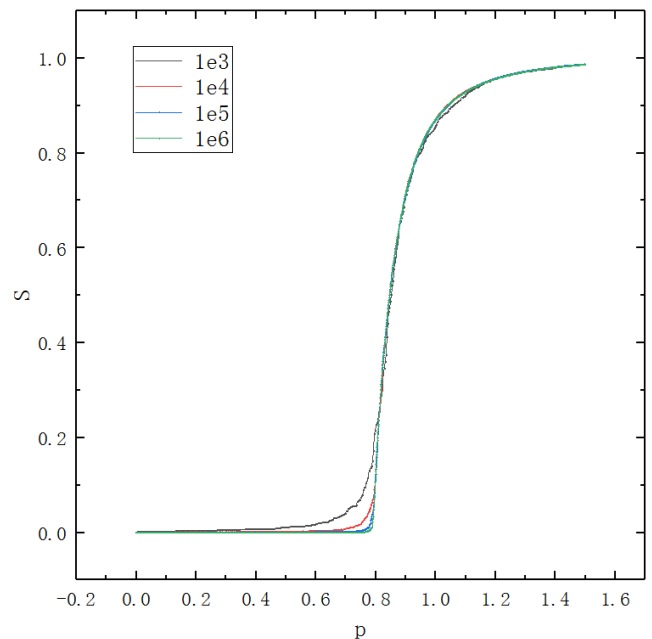
表一 随机网络中 ER 模型的临界指数。

从图像上看，随机网络中的 ER 模型发生了连续相变。根据数值模拟结果我们可以得到其临界指数。

对于随机网络，我们采用“标度窗”[6]的概念对临界指数 α 进行分析：在 $S = \sqrt{n}/n$ 时， $p = p_0$ ； $S = 1/2$ 时， $p = p_1$ ； $\Delta = p_1 - p_0$ 。在临界点附近有：

$$\Delta \sim n^{-\alpha}$$

对 ER 模型的临界指数的拟合结果如表一所示。随着网络变大，其 β 值和 γ 值不断增加，这也印证了图三中在 p_c 附近的变化。ER 模型中 α 理论值为 1[11]，计算值与理论模型符合得较好。对于渗流模型最重要的是 β 值和 γ 值，对应朗道二阶相变相应数值即可说明随机网络中的 ER 模型渗流属于二阶相变。



图四 随机网络下 PR 模型的 S-p 图。随着网络大小增大，图像逐渐变陡并趋近于同一条曲线，临界点位置 $p_c=0.8$ 附近。

对于 PR 模型，不同格点数对于 PR 模型下的渗流也有影响，如图四所示。渗流的临界点在 $p_c =$

n	10^3	10^4	10^5	10^6
p_c	0.82 ± 0.02	0.81 ± 0.02	0.81 ± 0.01	0.8 ± 0.01

表二 随机网络中 PR 模型的临界点位置。

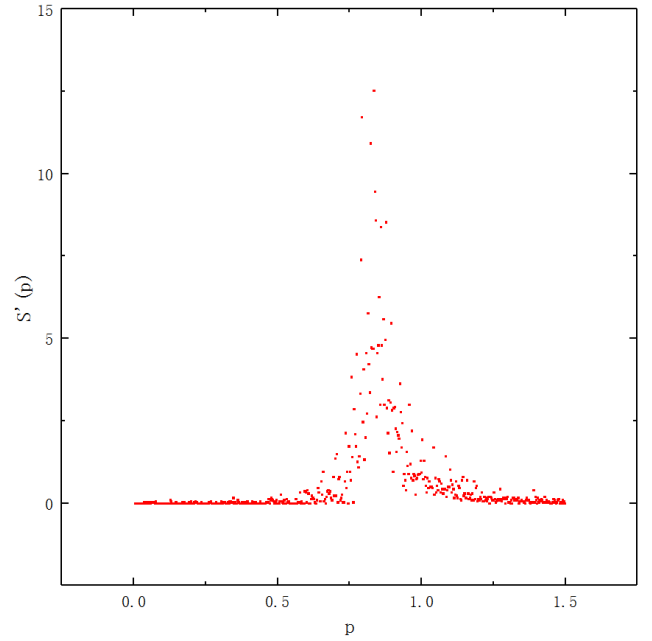
n	β	γ
10^3	0.11 ± 0.015	0.00090 ± 0.00006
10^4	0.29 ± 0.02	0.03 ± 0.03
10^5	0.35 ± 0.02	N/A
10^6	0.25 ± 0.011	N/A

表三 随机网络中 PR 模型的临界临界指数。大网络下的临界指数由于算力限制缺失。

0.8附近，但是对于随机网络在PR模型下的临界点没有办法精确确定，并非像普通渗流一样有精确解 $p = 0.8$ ，因此我们对其做导数图。我们可以得出 $n = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ 各规格的 p_c 及其不确定度，如表二所示。

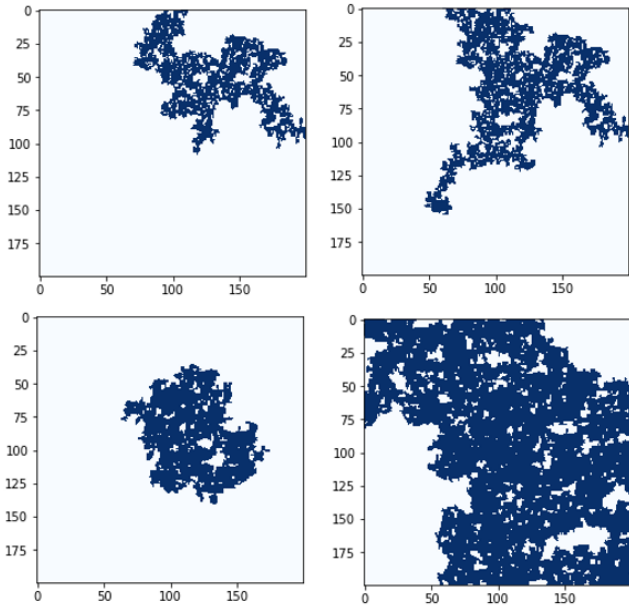
与ER模型相类似，我们主要以 β 与 γ 的大小来判断其是否符合一阶或二阶相变的特点。从表三中可以看到 β 与ER模型类似，而 γ 则几乎趋近于0。与朗道二阶相变的 $\gamma = 1$ 相比此临界参量偏差很大。但 β 的测量值又与Landau二阶相变模型类似，因此我们推断随机网络在ER模型下产生的渗流可以看作一种临界于一阶与二阶相变的相变，称为准一阶相变。准一阶相变从渗流图中展示出了在临界点的不连续性，但是如图五所示，其一阶导数并非不连续而是在临界点附近产生峰值，并不是真正的 δ 函数。同样地我们在二维正方晶格中的ER模型与PR模型会对这个问题做进一步阐述。

III. 二维正方晶格网络中的 ER 模型与 PR 模型

图五 随机网络下 PR 模型的 S 对 p 的一阶导数图。在 $p=0.8$ 附近出现极大值。

与随机网络中的ER模型与PR模型类似，在二维正方晶格网络中PR模型也会表现出爆炸渗流的效应。但是从网络特性上来说，随机网络与晶格网络又有着非常显著的区别：随机网络反映了网络的非局域性，体现了网络可以无视物理上距离进行连接的特性；而晶格网络则反映了极其强烈的局域性，每个顶点只能与最近邻的顶点相连接。本文选用最简单的晶格网络模型，即二维正方晶格网络，进行研究。类似地，我们采用与随机网络相同的ER模型与PR模型的构建方法：每次随机选取网络中的任意一个顶点，再从其周围最近邻的顶点（对于处于网络角上的顶点为2个，处于网络边上的顶点为3个，处于其他位置的顶点为4个）中随机选取一个顶点与其成组。

同样地，在二维正方晶格网络模型中ER模型与PR模型表现出与随机网络模型相似的性质。图六展示的是在临界点附近ER模型与PR模型下最大连通分支增长的行为。



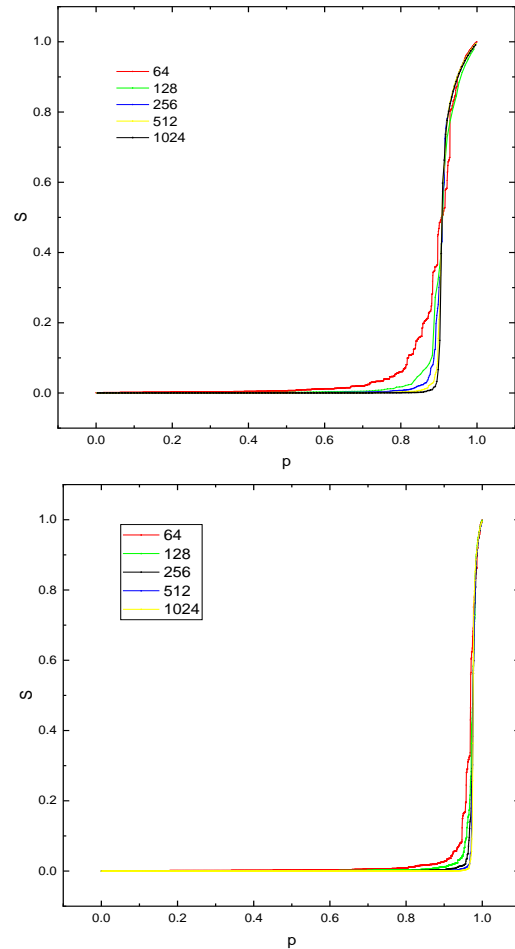
图六 左上图与右上图、左下图与右下图分别为二维正方晶格网络中ER模型与PR模型在临界点附近最大连通分支的行为，其中深色区域为最大连通分支。左上图：ER模型， $p=0.87$ ；右上图：ER模型， $p=0.88$ ；左下图：PR模型， $p=0.97$ ；右下图：PR模型， $p=0.98$ 。四幅图像均于正方形晶格网络边长 $L=200$ 时测得。

Temperley与Lieb从理论上推导了二维正方晶格网络模型中普通渗流的临界点 p_c 的解析值[12]：

$$p_c = \frac{7 - 3\sqrt{3}}{2} = 0.90192$$

我们对不同边长的二维正方晶格网络，分别按照ER模型和PR模型进行了模拟，得到其发生渗流的临界点 p_c ，以及在临界点附近的行为，并将相对最大连通分支大小 S 作为衡量体系发生渗流的参量。

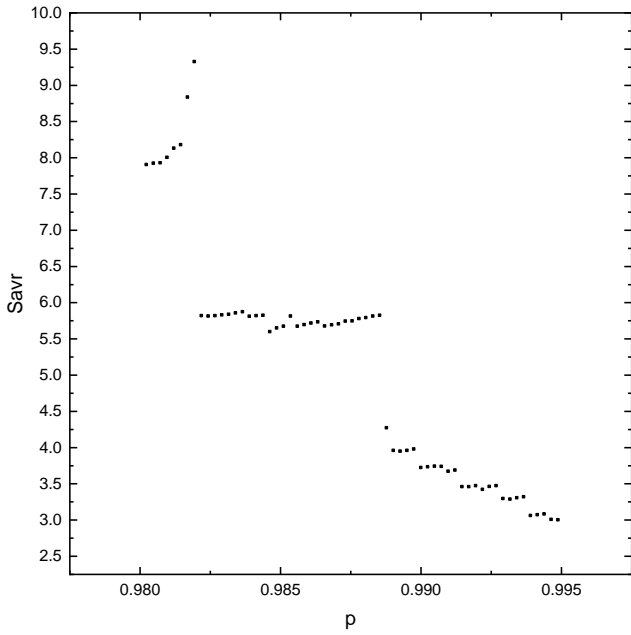
首先确定模型中临界点 p_c 。在二维正方晶格网络中，不同于随机网络图，可以确定序参量，为无限连通分支大小 C_∞ 。无限连通分支即渗流连通分支，指从整个方形网络的一段联通到另一端的连通分支，其出现表明整个网络被导通（类似于液体渗透了孔隙材料，比如石油穿过岩缝），



图七 二维正方晶格中ER模型与PR模型的 $S-p$ 图。上图是在ER模型下测得，下图是在PR模型下测得。随着网络大小的增大，两者的曲线都各自趋于同一条，且逐渐陡峭。

以无限连通分支相对大小(即 $S_\infty = C_\infty/n$)表征。对于二维正方晶格网络，在 $p < p_c$ 时，不存在无限连通分支， $C_\infty = 0$ ； $p > p_c$ 时，可以看到 C_∞ 的迅速增长，在PR模型下更从0陡增至接近1。由于在 p_c 两侧 C_∞ 分别取零与有限值，故 S_∞ 可作为方格网络的序参量，表征渗流相变是否发生。

下面是ER模型和PR模型下 S 随 p 变化。最大连通分支在整个渗流过程中都存在，变化模式类似于 S_∞ ：在 p_c 以下非零，但数值非常微小；在 p_c 以上与 S_∞ 相同。观察 S 随 p 变化可以粗略把握渗流发生的整体特征。



图八 S_{avr} 随 p 的变化。在临界点附近呈现一定的幂律分布，但当最大团簇连接次大团簇时出现陡降。

我们对边长为 $L=64, 128, 256, 512, 1024$ 的二维正方晶格网络分别按照ER模型和PR模型进行了测量，得到两种规则下 S 随 p 的变化，如图七所示。

可以看出，对于二维正方晶格网络，无论ER模型和PR模型，都会发生最大连通分支大小 C_1 的快速变化。其中，ER模型的临界点约为 $p = 0.9$ 附近，PR模型下被抑制至约 $p = 0.99$ ，说明如同在随机网络中的Achlioptas过程，PR模型有效抑制了最大连通分支形成，使得次大的连通分支在

临界指数	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$	$L = 512$
β	0.115 ± 0.006	0.152 ± 0.006	0.143 ± 0.001	0.152 ± 0.003
γ	0.813 ± 0.081	5.397 ± 0.427	3.624 ± 0.137	2.279 ± 0.105

表四 二维正方晶格中 ER 模型的临界指数。

临界指数	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$	$L = 512$
β	0.026 ± 0.001	0.090 ± 0.001	0.033 ± 0.001	0.012 ± 0.001
γ	0.410 ± 0.047	2.580 ± 0.326	1.531 ± 0.240	2.254 ± 0.104

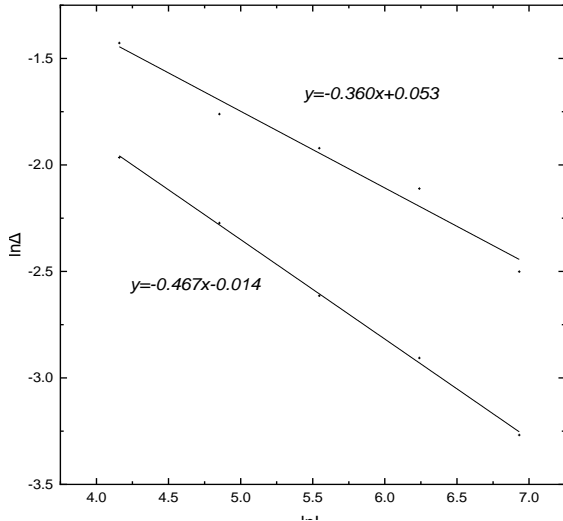
表五 二维正方晶格中 PR 模型的临界指数。

临界点 p_c 大量相连， C_1 值急剧增长。

且对于PR模型，二维正方晶格网络边长 L 对于结果的“爆炸”程度也产生影响：较小的 L 下连通分支生长尚有一定过程，随 L 增大，至 $L = 1024$ ，PR模型的爆炸渗流特性已十分显著， p_c 也较清晰、易于判断。由于爆炸渗流的终点对于不同 L 较一致、易于确定，因此我们通过对爆炸渗流起始点随 L 变化情况进行外推，求得 PR 规则下 $p_c = 0.975 \pm 0.005$ 。

在临界点附近，平均连通分支大小（除最大连通分支外） S_{avr} 随 p 的变化如图八所示，直观展现了该PR模型下的临界行为。连通分支大小跳变减小的原因为某次大连通分支与无限连通分支相连，使剩余部分平均大小减小，此过程在临界点以上发生数次，表明在 $p > p_c$ 处，无限连通分支几乎联通了方格子内所有连通分支，剩下未相连的都是很小的、局域的连通分支。

如果用无限连通分支大小 S_∞ 取代 S ，就能确定考察ER模型和PR模型下网络渗流的临界行为。这里仍采用前述网络大小，测量临界点附近两侧渗流系统行为，以及网格边长对求得的 p_c 的影响。我们测量了ER模型和PR模型下临界点附近的临界指数：我们对 $L = 64, 128, 256$ 的连通分支进行了 $\ln P - \ln|p - p_c|$ 、 $\ln S_\infty - \ln|p - p_c|$ 双对数线性拟合，斜率即所求两种规则下 β 、 γ 的值。对ER模型，我们直接以理论值 $p_c = (7 - 3\sqrt{3})/2 = 0.90192$ 进行拟合；对PR模型，以出现无限连通分支的连键比例 p 作为临界点。对不同网格边长，ER模型的结果如表四所示，PR模型的结果如表五所示。



图九 Δ 对 n 的幂律关系，上为 ER 模型，下为 PR 模型。 Δ 越小，临界点附近发生相变所需步数越少，相变越突然。

可以看到，ER模型下的临界行为可以用临界指数的标度率来衡量，且临界指数显著异于零。理论上，一级相变不服从标度行为，其临界指数为 0。PR模型的计算结果为十分接近 0 的有限值。再有，对于一般渗流系统，临界指数之间有唯象关系 $\gamma + 2\beta = 1$ ，而PR模型明显偏离这一关系。[11]表明其具有介于一级和二级相变之间的性质，因此PR模型下爆炸渗流的相变类型也是自这种过程出现起便备受争论的焦点之一。

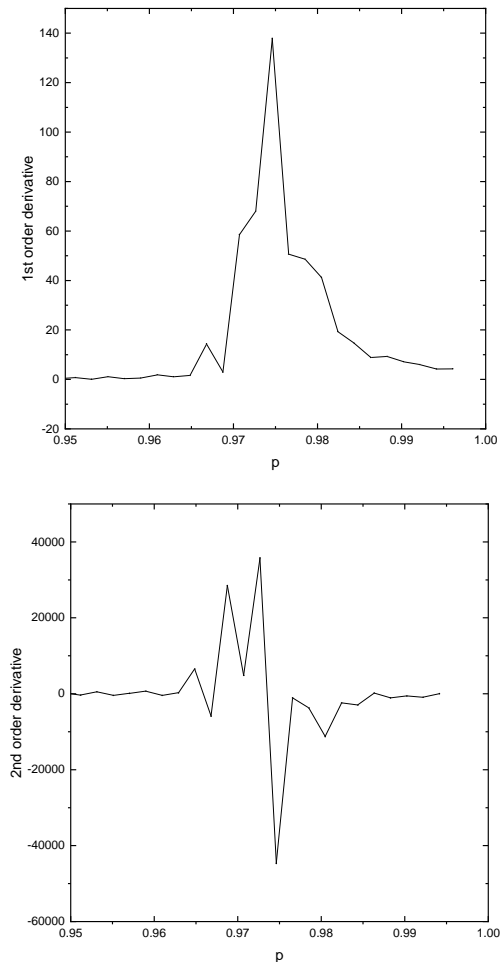
理论上对于渗流模型，网格越大，数值模拟结果越接近于真实值。现在上述有限网格中测量并作外推，其临界指数测量结果随网格大小有一定变化，表明有限网格中程序连边的随机性可能对结果产生一定影响，带来系统误差。

Achiloptas 等给出了判断相变级次的第二种方法。定义 $\Delta = p_1 - p_0$ ， p_1 为第一次出现连通分支 S 达到 $1/2$ 时的相对步数， p_0 为第一次出现连通分支 S 大小达到 \sqrt{n} 时的相对步数， n 为格点总数。 Δ 表征了晶格在渗流相变临界点附近变化的快慢，

从而表征了系统的“爆炸”特性。检查 Δ 对 n 的幂律关系，确定 $\Delta \sim n^{-\alpha}$ 中的指数 α ，可以判断相变的性质。

在图九中，我们测量了二维正方晶格的 Δ/n 对 L 关系。对ER模型，指数 $\alpha = 0.360$ ，与Ziff指出的理论结果 $\alpha = 36/91 \approx 0.396$ 较为接近[13]；PR模型中 $\alpha = 0.467$ ，与ER模型有显著差异，说明了二者在渗流相变性质上的不同。

判断相变级次的另一简单方法为对热力学量作导数，观察一阶导数与二阶导数是否连续、可



图十 边长为 $L=512$ 的 PR 模型渗流的阶数，用相邻离散数据点逐差作为导数近似。上图为 S_∞ 对 p 的一阶导数，下图为 S_∞ 对 p 的二阶导数。一阶导数呈现尖点，二阶导数在尖点处绝对值非常大，若取样点数增加可以进一步确定是否在此处发散。

导、发散。现取边长为 $L = 512$ 的 PR 模型渗流求其一阶、二阶导数，如图十所示。

测量结果显示， S_∞ 对 p 的一阶导数在相变点附近先快速增长后快速减小，产生一个尖点；二阶导数在尖点附近显示了更快的、“爆炸性”的变化过程，这暗示 PR 模型可能产生了一种准不连续相变。由于模型测量是对一系列离散点进行的，因此导数均为有限值，无法检验是否一阶导数可达无穷大，形成典型的朗道 λ 相变，但是非常大的二阶导数这种可能性，与前述临界指数显示的结果吻合。可以考虑在临界点附近取更高的采样密度，从而检验一阶导数是否逼近发散，此相变是否为真正的不连续相变。

相比随机网络模型，正方晶格还可以衡量其分形维度特性。 S_∞ 与网格边长 L 的变化关系服从幂律关系：

$$S_\infty \propto L^D$$

D 为网络的维度。一般情况下 $D = 2$ ，但在 p_c 附近，系统将呈现奇异性， $D = 2 - \varepsilon$ ， ε 为小量， $\varepsilon > 0$ 。这意味着在临界点附近，最大连通分支不是一个二维的完整覆盖整个晶格的图案，而是具有非整数维度的分形图案。

我们测量了 ER 与 PR 两种模型下临界点处的幂指数 D ，结果如表六所示。

ER 和 PR 模型的幂指数 D 略小于但十分接近于 2，且非常接近，表明最大连通分支的分形性

模型	ER模型	PR模型
幂指数 D	1.986 ± 0.091	1.995 ± 0.042

表六 二维正方晶格中 ER 模型与 PR 模型的分形维度。两种模型都有 D 略小于 2，表明无限连通分支几乎稠密地联通了其边界以内所有区域。

质弱，最大连通分支出现时，几乎将其所联通范围内的所有键都已联通。

理论上对于渗流模型，网格越大，数值模拟结果越接近于真实值。现在上述有限网格中测量并作外推，其临界指数测量结果随网格大小有一定变化，表明有限网格中程序连边的随机性可能对结果产生一定影响，带来系统误差。

IV. 三维立方晶格网络中的 ER 模型与 PR 模型

很自然地考虑将二维正方晶格向三维推广，研究立方晶格下的爆炸渗流系统的特性与数值结果。相比二维模型，三维模型每个格点所邻接的键更多，配位数更高，应当使得无限联通分支的形成更加容易，从而 p_c 减小。Schrenk, Araújo, Herrmann 用高斯模型在普通三维立方和高维超立方网格上实现爆炸渗流，测量了临界值 p_c 约为 0.3，最大连通分支随边长增长的幂指数 D 约为 2.5，并依照平均场近似作了理论计算与说明[14]。我们不采用高斯模型，而仍使用 PR 模型，以便与二维情形作比照。

将三维立方晶格与二维正方晶格作一比较，两者每个格点的周围最近邻格点数，即配位数，分别为 6 与 4。由于对于一个格点，配位数越多，其越容易以更小的连键概率 p 与周围联通，因此可以预期三维情形下临界点 p_c 将前移，相变更容易发生。

在实际模拟时，对于三维情形，所取网格边

维度	ER	PR
二维	0.90	0.99
三维	0.72	0.92

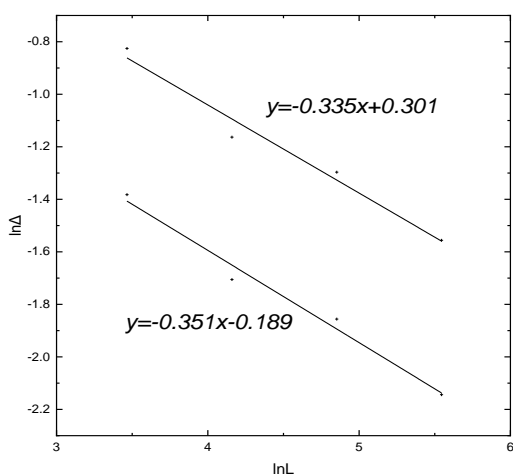
表七 两种维度的晶格在 ER 与 PR 模型下临界 p_c 对比

临界指数	L = 16	L = 32	L = 64	L = 128
β	0.266±0.006	0.614±0.005	0.425±0.009	0.439±0.006
γ	0.088±0.019	0.485±0.047	0.712±0.106	1.431±0.105

表八 三维立方晶格中 ER 模型的临界指数。

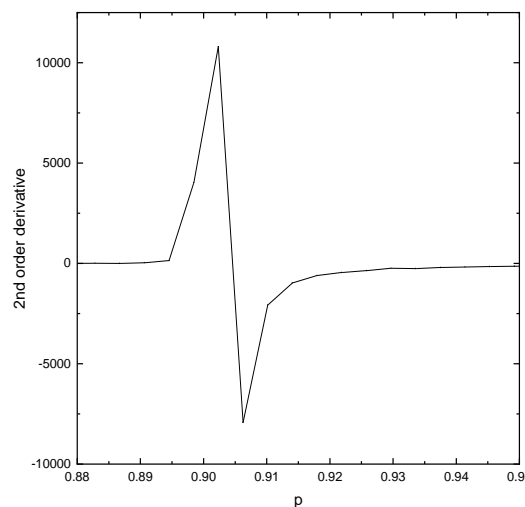
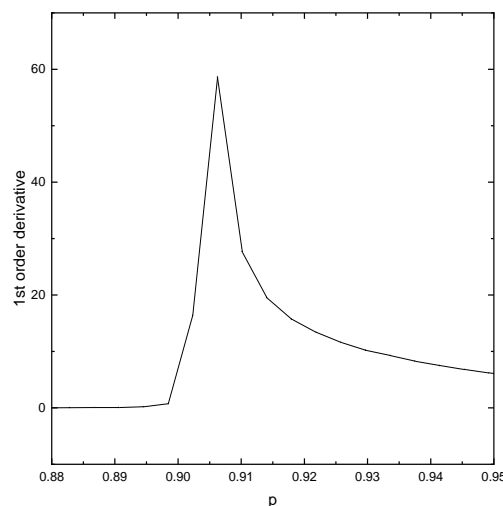
临界指数	L = 16	L = 32	L = 64	L = 128
β	0.043±0.004	0.041±0.003	0.087±0.007	0.294±0.011
γ	1.220±0.173	1.235±0.236	0.575±0.093	1.308±0.114

表九 三维立方晶格中 PR 模型的临界指数。



图十一 三维立方晶格 Δ/n 对 L 的幂律关系, 上为 ER 模型, 下为 PR 模型。相比二维情况, 三维晶格中幂指数相当接近, 相变的连续性差异减小。

长为 $L=32, 64, 128, 256$, 所得 $S-p$ 图测量结果如上图十一。直观地看, 三维情形最大联通分支大小同样在 p_c 附近发生急剧增长, 并且随晶格大小增加, p_c 收敛于同一结果。另外, 三维情形比二维更容易发生相变, 即 p_c 值更小, ER 模型约为 0.72, PR 模型约为 0.92。我们将对比数据列于表七。



图十二 边长为 $L=128$ 的 PR 模型渗流的阶数, 用相邻离散数据点逐差作为导数近似。上图为 S_∞ 对 p 的一阶导数, 下图为 S_∞ 对 p 的二阶导数。类似于二维情形, 在相变点附近导数迅速增大。

表八和表九显示了三维立方晶格中两种模型的临界指数拟合值, 测试晶格边长为 $L=16, 32, 64, 128$ 。所得结果与二维情形是相似的: β 测量较为准确, 基本上接近于零, 显示连续相变特性; γ 异于零, 但较难测量, 不确定度较大, 且不同次模拟结果差异较大, 很可能因临界指数测量时模拟并取平均次数不足。

Δ 对 n 的幂律关系在三维立方晶格中的特性与二维差异较明显, 如图十二所示。无论 ER 或 PR 模型, 幂指数 α 取值相近, 且都接近二维中 ER 模

型的情形，暗示三维晶格中PR模型的爆炸渗流特性减弱。

对 $S - p$ 图作一阶导数，其结果如图十二所示。在相变点附近仍然有尖点行为，二阶导数显示一阶导数变化剧烈。但一阶和二阶导数在尖点处的绝对值都小于二维情形，更可能不趋向于发散，而是准不连续相变。

网络类型	ER模型	PR模型
幂指数 D	2.524 ± 0.079	3.145 ± 0.189

表十 三维立方晶格中 ER 模型与 PR 模型的分形维度。在 ER 模型中， D 接近于 2.5，显示正常分形情况；而在 PR 模型中， D 略大于 3，存在异常。

临界点处最大连通分支图形的分形性质见表十。在 ER 模型下的幂指数 D 接近于 2.5，与 Schrenk 等对三维晶格的结果吻合，显示出图形的分形性质，在空间中不是“密实”的 [14]；PR 情形下结果大于 3，超过晶格维度，表明结果存在一定问题，可能仍然源于临界点附近测量平均次数不足，使得最大连通分支的选取在不同次模拟中前后不一。

V. 二维三角晶格网络中的 ER 模型与 PR 模型

在二维网络中，对于每一个格点其配位数（临近格点数）对于其临界现象有很关键的影响。随机网络在配位数上无限制，而二维正方晶格则配位数为 4，而对于三角晶格，配位数为 6，在一定程度上会促使临界值 p_c 减小。可以预见将 p_c 提前的程度不甚明显。同样我们在三角网络上也进行 PR 模型操作，将其与二维模型作比对。我们对正方晶格做变换来生成三角晶格，因此对于三角晶格我们依旧用边长来衡量网络大小。

首先对 ER 模型取网络边长为 $L = 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ 所得 p_c 测量结果如图十三。随着网络大小增加在 p_c 附近的斜率逐渐增大，相变现象越明显。我们先确定临界点 p_c ，与二维正方晶格相比提前的非常不明显。取 $L = 1024$ 作一阶导数图可以找到 $p_c = 0.889 \pm 0.007$ 。从一阶导数图也可以看到在临界点附近有峰值，同时虽然我们采用逐差求导，但是可以明显看出对于其一阶导数连续。图十中得到的 p_c 与二维正方晶格理论值相比略小，符合预期。

同样地，我们计算最重要的三个临界指数 β 、 γ 与 α 进行拟合，而三角方格由正方晶格变换生成，存在无限团簇。由于性能所限，我们对边长为 $L = 32, 64, 128, 256$ 进行模拟，得到相应的临界指数，如表十一中上表所示。

L	β	γ	α
32	0.13 ± 0.02	2.20 ± 0.19	
64	0.15 ± 0.02	2.92 ± 0.61	0.363 ± 0.014
128	0.21 ± 0.02	5.30 ± 0.56	
256	0.109 ± 0.009	1.97 ± 0.41	

L	β	γ	α
32	0.20 ± 0.018	3.01 ± 0.41	
64	0.12 ± 0.013	4.40 ± 0.78	0.425 ± 0.017
128	0.12 ± 0.012	2.55 ± 0.44	
256	0.0103 ± 0.0004	1.42 ± 0.18	

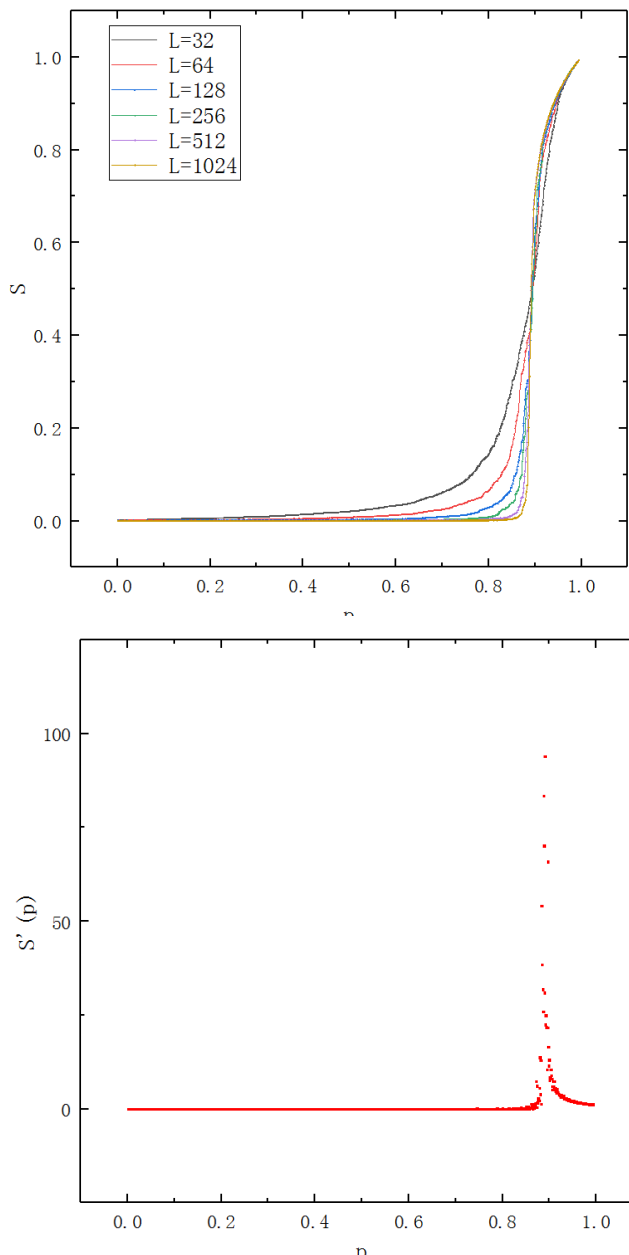
表十一 二维三角晶格 ER 与 PR 模型的临界指数及其不确定度，表十一中上表为 ER 模型临界指数，下表为 PR 模型临界指数。

看到临界指数 β 和 γ 与二维正方晶格相差不多， α 也较为接近。符合对于 ER 模型的二阶相变的预期。

再对三角模型做 PR 模型的研究，同样先对各个边长的模型做渗流图的拟合，并且逐差得到相

应的一阶导数图。

很明显从图十三的PR模型图来看，相比ER模型的 p_c 有所滞后，且从其一阶导数的峰值更接近 δ 函数，通过导数图可以看到 $p_c = 0.972 \pm 0.006$ 。由于其一阶导数更接近 δ 函数，所以在许多文献中将PR规则看成了一阶相变，但是由于我们采集点有限，其一阶导数实际是连续的，但是从渗流图中却显示出了爆炸的特性，同样我们可以称



图十三 边长为 $L=32, 64, 128, 256, 512, 1024$ 的三角ER模型渗流图及对 $L=1024$ 逐差后的一阶导数图。上图为渗流图，下图为导数图，得出 $p_c = 0.889 \pm 0.007$

它为准一阶相变。

接着我们对PR模型的三角晶格做临界指数 β, γ, α 的拟合，如表十一中下表所示。

将三角晶格的PR模型与ER模型和正方晶格作对比可以看到临界指数相差不大，同样结果的不确定度较大，这是由于点数不足很难在临界点附近找到非常合适的幂律关系。ER模型和PR模型相比二维正方晶格， p_c 值稍微提前，如考虑不确定度则可以认为两者一致。同样，从临界指数的角度来看 β 与 γ 值都与正方晶格相似，且由于不确定度较大，近乎也可以认为两者一样。综合第一部分我们的随机网络模型，其配位数可以认为是无穷大，且其维数也可视作无穷大，才可以显著的将临界点提前，同时在PR模型上有着比较明显的准一阶相变。二维正方晶格或是三角晶格的PR模型都没有在临界指数上显示出明显的一阶相变的倾向。因此我们也可以明确二维晶格在配位数变化不大的情况下临界指数几乎无变化。

网络类型	ER	PR
D	1.88 ± 0.07	2.03 ± 0.19

表十二 二维三角晶格网络ER模型与PR模型的分形维度。ER模型略小于2，PR模型略大于2。

我们同样再衡量其分型维度，如表十二所示。由于临界点未知精确解，所以在选取临界点位置时对于无限团簇大小有影响，会导致分型维度略大于2，但由于不确定度较大，所以无法更进一步得出更精确的分型维度。可以看到分型维度主要与网络本身的维度有很大关系，而与晶格关系不大。由于随机网络不存在无限团簇的概念，因此无法估计分型维度。

我们考察了二维的三角与正方晶格模型的一系列临界现象，两种模型有着非常多的相似点，临界点、临界指数、分型维度都非常接近。虽然表现出的性质稍有不同，但是整体趋势一致。与三维立方晶格网络相比，配位数带来的影响几乎可以忽略不计。这是因为与Ising模型不同，渗流模型不仅仅关注最近邻格点的影响，网络的成环性、非近邻点之间的通路都会影响到渗流模型所呈现的效果。

VI. 结论与展望

在网络中，ER模型和PR模型在渗流性质上表现出极大的不同。一方面，PR模型相比ER模型临界点更加滞后，另一方面，PR模型的临界行为又表现出特殊的性质，更接近于准一级相变。于此同时，我们还横向比较了不同网络（随机网络、

二维正方晶格网络、三维立方晶格网络、二维三角晶格网络）中PR模型的渗流效果，发现最直接影响渗流效果的网络参数是网络的维度，维度越高，渗流现象的临界点就越提前。

爆炸渗流特殊的渗流类型是我们对它感兴趣的重要原因，我们认识到爆炸渗流的准一级相变类型的特殊性，它加深了我们对于相变行为的理解。

当然，对于爆炸渗流我们仍存在许多未解的问题，例如其背后的热力学性质、不同网络对相变性质的影响、产生特殊相变类型的机制、其对应现实世界中的物理模型等，而这些物理规律都需要进一步的研究。

最后，我们感谢陈焱老师在课堂上的悉心教导，对我们的选题给出指导性意见，以及为我们提供这一次科研实践的机会。

-
- [1] Berkowitz B, Ewing R P. Percolation Theory and Network Modeling Applications in Soil Physics[J]. Surveys in Geophysics, 1998, 19(1):23-72.
 - [2] Berkowitz B, Balberg I. Percolation theory and its application to groundwater hydrology[J]. Water Resources Research, 1993, 29(4):775-794.
 - [3] Poggi S, Neri F M, Deytieux V, et al. Percolation-Based Risk Index for Pathogen Invasion: Application to Soilborne Disease in Propagation Systems[J]. Phytopathology, 2013, 103(10):1012-1019.
 - [4] Meyers L. Contact network epidemiology: Bond percolation applied to infectious disease prediction and control[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 2007, 44.
 - [5] Callaway D S, Newman M E J, Strogatz S H, et al. Network Robustness and Fragility: Percolation on Random Graphs[J]. Physical Review Letters, 2000, 85(25):5468-5471.
 - [6] Achlioptas D, D'Souza R M, Spencer J. Explosive Percolation in Random Networks[J]. Science, 2009, 323(5920):1453-1455.
 - [7] Da C R, Dorogovtsev S N, Goltsev A V, et al. Explosive percolation transition is actually continuous[J]. Physical Review Letters, 2010, 105(25):255701.
 - [8] Rozenfeld H D, Gallos L K, Makse H A. Explosive percolation in the human protein homology network[J]. European Physical Journal B, 2010, 75(3):305-310.
 - [9] Pan R K, Kivelä M, Saramäki J, et al. Using explosive percolation in analysis of real-

- world networks.[J]. Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics, 2011, 83(4 Pt 2):046112.
- [10] Stauffer D, Aharony A. Introduction to percolation theory[M]. Taylor & Francis, 2014.
- [11] 刘卯鑫. 复杂网络中的临界现象[D]. 中国科学院大学,2012.
- [12] Temperley H N V, Lieb E H . Relations between the "Percolation" and "Colouring" Problem and other Graph-Theoretical Problems Associated with Regular Planar Lattices: Some Exact Results for the "Percolation" Problem[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1971, 322(1549):251-280.
- [13] Ziff R M. Explosive growth in biased dynamic percolation on two-dimensional regular lattice networks[J]. Physical review letters, 2009, 103(4): 045701.
- [14] Schrenk K J, Araújo N A M, Herrmann H J. Gaussian model of explosive percolation in three and higher dimensions[J]. Physical Review E, 2011, 84(4): 041136

附录 A: 小组成员贡献

陈寅聪: 编写渗流数值模拟、数学分析的所有所需程序, 撰写论文摘要、引言、各模型概述、结论部分并对全篇论文的文字、图表进行排版。

个人贡献: 36%

李智杰: 对二维正方晶格网络中ER模型和PR模型及三维立方晶格网络中 ER 模型与 PR 模型下的渗流进行数值模拟, 并对其临界现象进行拟合分析, 撰写论文第三节、第四节中数学分析部分。

个人贡献: 32%

孙泽恩: 对随机网络中ER模型和PR模型及二维三角晶格网络的 ER 模型与 PR 模型下的渗流进行数值模拟, 并对其临界现象进行拟合分析, 撰写论文第二节、第五节中数学分析部分。

个人贡献: 32%

附录 B: 主要程序

本文所使用的程序均为作者独立编写, 现已上传至GitHub网站上, 地址为: <https://github.com/explosive-percolation/explosive-percolation>

感兴趣的同学可以下载并使用本文所使用的程序, 若需要帮助也可联系本文作者。