数学分析

要点 · 难点 · 拓展

楼红卫 编

高等教育出版社

内容提要

本书以注记的形式讲述数学分析中一些值得注意的要点和难点，并做适当的拓展。

本书内容分为上、下两篇。上篇是针对现有通行教材，对各章的内容做些补充，主要是解释性的。由于可以从教材内容的先后次序中解脱出来，因此本书的内容会有助于学生对数学分析知识的融会贯通。下篇则是讲述一些通常教材中不讲的但属于学生经常思考乃至迷惑的问题，内容也更具有拓展性。特别，在本书中我们尝试将数学不同分支的一些重要思想融入数学分析的学习中，这一切将有利于学生对数学分析的深入理解和今后在数学上的进一步发展。

本书适合数学类专业学生使用，也可供教授数学分析课程的教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析：要点·难点·拓展 / 楼红卫编. -- 北京：高等教育出版社，2020. 6
ISBN 978-7-04-053443-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①楼… Ⅲ. ①数学分析 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 015343 号

Shuxue Fenxi Yaodian Nandian Tuozhan

策划编辑 胡 颖　责任编辑 胡 颖　封面设计 张 楠　版式设计 马 云
插图绘制 于 博　责任校对 王 雨　责任印制 刁 毅

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京玥实印刷有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 20.75
字　　数 370 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
　　　　 http://www.hepmall.com
　　　　 http://www.hepmall.cn
版　　次 2020年6月第1版
印　　次 2020年6月第1次印刷
定　　价 39.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 53443-00

目录

上篇　基本内容

下篇　拓展内容

11 微分中值定理

78. 微分中值定理的辅助函数 罗尔①定理的几何意义是, 如果一个可微函数在两个点 a,b 上有相同的函数值, 那么在这两点之间的某一点, 该函数的切线是平的, 也就是平行于函数对应于 a,b 两点的割线. 推广到一般的情形就得到拉格朗日②中值定理. 通常认为根据这一几何意义, 可以构造证明拉格朗日中值定理的辅助函数. 类似地, 柯西中值定理被认为是以参数形式表示的函数的拉格朗日中值定理, 并按此在证明时构造辅助函数. 然而, 事实上, 很多学生很难做到这一点.

以下我们利用不定积分的思想来构造辅助函数.

拉格朗日中值定理. 对于拉格朗日中值定理, 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 要证明存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f(b)-f(a)-f'(\xi)(b-a)=0.$$

这只要构造一个在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 内可导的函数 $F(x)$ 使得

$$F'(x)=f(b)-f(a)-f'(x)(b-a) \tag{11.1}$$

和

$$F(a)=F(b) \tag{11.2}$$

成立. 有了不定积分的思想, 我们就不难找到以下辅助函数:

$$F(x)=(f(b)-f(a))x-f(x)(b-a).$$

容易验证③条件 (11.2) 成立: $F(a)=F(b)=af(b)-bf(a)$. 又易见 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导. 于是根据罗尔定理, 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$. 这就是

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

① Rolle, Michel, 1652 年 4 月 21 日—1719 年 11 月 8 日, 法国数学家.

② Lagrange, Joseph-Louis, 1736 年 1 月 25 日—1813 年 4 月 10 日, 法国数学家.

③ 在证明中, 为了验算方便, 显然取 $F(x)$ 为 $F(x)=(f(b)-f(a))(x-a)-(f(x)-f(a))(b-a)$ 更好, 此时有 $F(a)=F(b)=0$.

柯西中值定理. 类似地, 对于柯西中值定理, 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 要证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$(f(b)-f(a))g'(\xi)=(g(b)-g(a))f'(\xi). \tag{11.3}$$

为了证明这一结论, 我们只要构造一个在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导的函数 $F(x)$, 使得

$$F'(x)=(f(b)-f(a))g'(x)-(g(b)-g(a))f'(x)$$

以及 $F(a)=F(b)$ 成立. 为此, 利用不定积分可取

$$F(x)=(f(b)-f(a))(g(x)-g(a))-(g(b)-g(a))(f(x)-f(a)),$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $F(a)=F(b)=0$. 由罗尔定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$. 此即 (11.3) 式成立.

79. 多重零点 设 $k\geqslant 1$, 我们称 x_0 是 $f(x)$ 的 k 重零点, 如果 $f(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$.

容易证明, 若在区间 $[a,b]$ 上有 n 阶导数的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $n+1$ 个零点 (含重数), 则 $f'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上至少有 n 个零点 (含重数). 归纳可得, 存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f^{(n)}(\xi)=0$.

进一步, 可以减弱函数在端点的可导性要求, 以及 (当这些零点不全相同时) 说明 ξ 可以在开区间内取到.

80. 利用行列式推广中值定理 利用行列式很容易得到中值定理如下的推广: 设 $f(x),g(x),h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi)\end{vmatrix}=0.$$

对于插值多项式或泰勒[①]展开式, 也可以仿照着给出相应结果.

81. 满足特定等式的导数值 对于类似于中值定理这样的涉及函数的导数的点的存在性, 更深入的方法请参见第 12 节插值多项式中的内容, 以及第 23 节微分达布[②]定理及中值定理类问题.

82. 等价量的替换 在极限计算中, 等价量的替换应该遵循只在乘除法中使用的原则, 更确切地说, 等价量的替换本质上只在以下两种情形中进行: 若 $\lim\dfrac{f}{g}=1$,

① Taylor, Brook, 1685 年 8 月 18 日—1731 年 12 月 29 日, 英国数学家.

② Darboux, Jean-Gaston, 1842 年 8 月 14 日—1917 年 2 月 23 日, 法国数学家.

则

$$\lim Ff = \left(\lim Fg \cdot \lim \frac{f}{g} = \right) \lim Fg,$$

$$\lim \frac{F}{f} = \left(\lim \frac{F}{g} \cdot \lim \frac{g}{f} = \right) \lim \frac{F}{g}.$$

在替换过程中, 心里应该想着有括号中省略的那一步.

$f \sim g$ 就是 $f = g + o(g)$. 如果不确定在等价量的替换中是否有错误, 则采用以 $g + o(g)$ 而不是 g 来替换 f, 一般就可以发现计算过程正确与否.

83. 洛必达①法则②,③的推广 类似于 (4.1), 我们可推广洛必达法则并给出简捷的证明.

定理 11.1 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 (a,b) 上可微,

(a) $g'(x) \neq 0$;

(b) $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = +\infty$,

则

$$\varliminf_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant \varliminf_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{11.4}$$

证明 对于 $a < x < y < b$, 我们有 $\xi \in (x,y)$ 使得

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

从而

$$\inf_{t\in(a,y)} \frac{f'(t)}{g'(t)} \leqslant \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \leqslant \sup_{t\in(a,y)} \frac{f'(t)}{g'(t)},\ a<x<y<b.$$

上式中令 $x \to a^+$, 并注意到条件 (b) 蕴含

$$\varliminf_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \varliminf_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}, \quad \varlimsup_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \varlimsup_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)},$$

可得

$$\inf_{t\in(a,y)} \frac{f'(t)}{g'(t)} \leqslant \varliminf_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \sup_{t\in(a,y)} \frac{f'(t)}{g'(t)},\ a<y<b.$$

再令 $y \to a^+$ 即得 (11.4). □

① Marquis de L'Hospital, Guillaume François Antoine, 1661 年—1704 年 2 月 2 日, 法国数学家.

② 一般认为, 洛必达法则并非由洛必达原创, 应该是约翰 · 伯努利的成果.

③ Bernoulli, Johann (也写作 Jean 或 John), 1667 年 8 月 6 日 (一说 7 月 27 日)—1748 年 1 月 1 日, 瑞士数学家.

定理 11.2 设 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 上可微,

(a) $g'(x) > 0$;

(b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$,

则

$$\varliminf_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant \varliminf_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \varlimsup_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{11.5}$$

证明 对于 $a<y<x<b$, 我们有 $\xi \in (y,x)$ 使得

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{11.6}$$

从而

$$\inf_{t\in(a,x)} \frac{f'(t)}{g'(t)} \leqslant \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \leqslant \sup_{t\in(a,x)} \frac{f'(t)}{g'(t)},\ a<y<x<b.$$

在上式中令 $y \to a^+$ 即得

$$\inf_{t\in(a,x)} \frac{f'(t)}{g'(t)} \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \sup_{t\in(a,x)} \frac{f'(t)}{g'(t)},\ a<x<b.$$

于是 (11.5) 成立. □

可以类似地写出对应于 $x \to +\infty$ 等情形的结果.

注 11.1 补充定义 $f(a) = g(a) = 0$, 则 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b)$ 连续, 在 (a,b) 内可微, 因此 (11.6) 可以直接替代为: 存在 $\eta \in (a,x)$ 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}. \tag{11.7}$$

84. 洛必达法则的运用 在极限的计算中, 洛必达法则非常有效, 因此深得学生喜爱. 如果能够结合等价量的运用, 则洛必达法则将更为有效, 详情可参见第 24 节 “洛必达法则和等价关系的灵活运用”.

与施托尔茨定理的使用类似, 在洛必达法则 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell \equiv \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 的使用中, 等式后极限的存在性保证了等式前的极限存在且和后者相同, 这既是一种计算, 也包含着一种证明.

与施托尔茨定理略有不同的是, 洛必达法则中的 ℓ 可以是 ∞, 而施托尔茨定理中, 相应的 ℓ 可以为 $+\infty$ 或 $-\infty$, 但当它为 ∞ 时, 定理不再成立.

另一方面, 如果是单侧极限, 在洛必达法则中, 如果 ℓ 是 ∞, 则它实际上又必定为 $+\infty$ 或 $-\infty$.

85. 利用洛必达法则证明 与施托尔茨定理一样, 有时候, 洛必达法则让我们可以通过计算来证明极限的存在性.