

解析几何与几何片段

傅吉祥 姚一隼
复旦大学数学科学学院

2022 年 8 月 29 日

目录

第一章 三维空间的向量代数	1
1.1 向量的定义	1
1.2 向量的线性运算	2
1.3 向量的位置关系	6
1.3.1 共线	7
1.3.2 共面	9
1.4 内积	13
1.5 外积	17
1.6 混合积	23
1.7 双重外积公式	25
第二章 直线与平面	29
2.1 空间直角坐标系	29
2.2 直线方程	33
2.3 平面方程	35
2.4 位置关系	37
2.4.1 两条直线的位置关系.	37
2.4.2 直线与平面的位置关系.	40
2.4.3 平面与平面的位置关系.	42
2.5 平面束	44
2.6 单参数直线族编织曲面的例子	46
第三章 曲面与曲线	51
3.1 曲线与曲面的表示	51

3.1.1	曲线的表示	51
3.1.2	曲面的表示	54
3.1.3	曲面中的曲线	57
3.2	二次曲面的形状与性质	59
3.2.1	二次曲面的形状	59
3.2.2	二次曲面的凸性	61
3.2.3	二次曲面的直纹性	62
3.3	直角坐标变换	63
3.4	二次曲面的分类	67
3.4.1	二次齐次多项式的化简	68
3.4.2	二次曲面的分类	72
3.5	曲面的相交与曲面所围的区域	76
3.5.1	交线的画法	76
3.5.2	区域的表示与曲面所围的区域	78
3.6	一些非二次曲面的例子	81
3.7	拓展材料	85
第四章	等距变换与仿射变换	87
4.1	平面等距变换	87
4.1.1	定义与性质	87
4.1.2	坐标表示	89
4.1.3	例子	90
4.1.4	分类	92
4.2	空间等距变换	94
4.3	平面仿射变换	98
4.3.1	定义与性质	98
4.3.2	坐标表示	100
4.3.3	例子与分解	101
4.3.4	仿射不变量	102
4.4	空间仿射变换	104
4.5	等距变换群与仿射变换群	106
4.6	拓展材料	108

第五章 射影几何	109
5.1 射影平面与射影直线	109
5.1.1 射影直线	109
5.1.2 射影平面	111
5.1.3 $\mathbb{R}P^2$ 上的射影直线.	113
5.1.4 Desargues 定理	114
5.2 射影坐标系与射影坐标	115
5.2.1 射影平面的射影坐标系	116
5.2.2 射影直线的射影坐标系	117
5.2.3 射影直线的射影坐标	118
5.3 平面射影几何的内容	120
5.4 交比	123
5.4.1 交比	123
5.4.2 一维射影变换	125
5.4.3 透视	126
5.4.4 中心透视	127
5.5 二次曲线	130
5.5.1 二维射影变换	130
5.5.2 配极	131
5.5.3 二次曲线	132
5.5.4 Steiner 定理与 Pascal 定理	133
5.6 拓展材料	136
第六章 微积分观点下的曲线与曲面	137
6.1 曲线的弧长参数化	137
6.2 曲面的局部参数化	139
6.3 测地线	143
6.4 曲率	148
6.5 球面几何	152
6.6 双曲几何	154
6.7 历史回顾与总结	161
6.7.1 非欧几何	161
6.7.2 Klein 观点下的几何	162
6.8 拓展材料	162

第一章 三维空间的向量代数

我们生活在三维欧氏空间, 定义了长度, 方向, 角度等. 例如, 线段是有长度的, 两条直线是有夹角的, 力是有大小与方向的. 但在三维空间中, 并没有规定原点. 如果规定中国人民大会堂为原点, 另外的国家就要有意见了. 当然有时暂定人民大会堂为原点是有好处的, 例如在开十八大时, 全世界的目光都聚焦于此. 虽说三维空间中没有固定的直角坐标系, 但有时为了解决具体的问题, 可人为地建立一个理想的直角坐标系. 这就是解析几何的起源.

这一章讲三维空间的向量代数. 我们并不急着建立直角坐标系, 而在下一章第一节才引入它. 这样做既是抽象思维训练的需要, 也是为了强调一个向量与它的始点无关, 它可以在空间自由地, 无拘无束地平行移动而不引起改变.

1.1 向量的定义

向量在生活中无处不在, 具体的如箭, 抽象的如力与力矩等一些物理量. 物理学习习惯把向量称为矢量.

定义 1. 三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中既有大小又有方向的量称为**向量**.

在画图时向量用带上箭头的线段表示, 线段的长度表示向量的大小, 箭头代表向量的方向. 一个始点为 A , 终点为 B 的向量记作 $\overrightarrow{AB}$. 它的大小即为线段 AB 的长度, 记作 $|\overrightarrow{AB}|$. 如果无需强调一个向量的始点与终点, 则把它简记为 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 等, 相应的大小记作 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$. 本书常用小写的数学黑体¹字母表示向量, 如用 $\mathbf{a}$ 表示向量 $\vec{a}$.

需要强调的是向量与它的始点无关, 只与它的长度和方向有关. 所以对一个向量作任意的平行移动后得到的向量与它相等. 如图 1.1 作平行四边形 $ABCD$, 则 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. 但是 $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, 因为虽然这两个向量的长度相等但方向相反.

定义 2. 与向量 $\mathbf{a}$ 大小相等方向相反的向量称为 $\mathbf{a}$ 的**逆向量**, 记作 $-\mathbf{a}$.

这样, 根据定义,

$$-(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}.$$

在图 1.1 中 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$. 规定长度等于零的向量为**零向量**, 记作 $\mathbf{0}$. 它没有方向, 可简记为 0.

¹指 Latex 语言 `\mathbf{a}`.

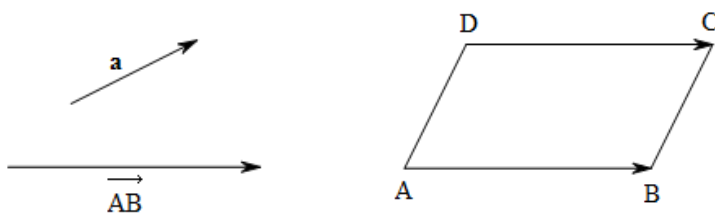


图 1.1: 向量的表示与平行移动

习题 1.1

1. 举出几个日常生活中向量的例子.
2. 根据逆向量的定义证明 $-(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}$.
3. 先在平面上建立一个直角坐标系, 再画以下向量:
 - 1) 一个长度是 3 厘米, 方向与 x 轴正向一致的向量;
 - 2) 两个长度是 4 厘米, 方向与 y 轴正向相反的向量;
 - 3) 三个长度是 5 厘米, 方向朝上且与 x 轴正向的夹角是 $\pi/4$ 的向量.
4. 在平面上画等式 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ 的示意图.

1.2 向量的线性运算

定义 3. 定义两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的**加法**如下. 将向量 $\mathbf{b}$ 作平行移动使得它的始点与 $\mathbf{a}$ 的终点重合后 得到一个向量 $\mathbf{c}$, 它的始点与终点分别是 $\mathbf{a}$ 的始点与 $\mathbf{b}$ 的终点. 向量 $\mathbf{c}$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的**和**, 记作 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$.

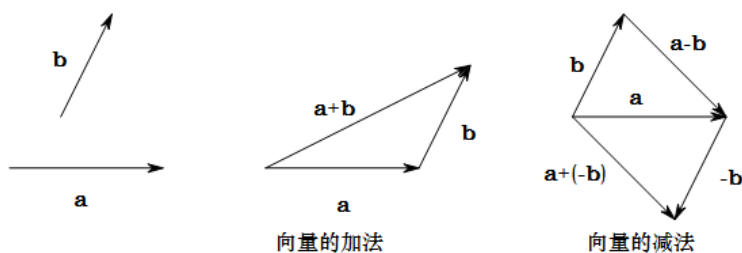


图 1.2: 向量的加减法

有了向量加法与逆向量的定义, 就可定义两个向量的**减法**. 向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的差 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 定义为

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

从图 1.2 向量的减法可以读出若向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的始点重合, 则向量 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 的始点与终点分别是向量 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 的终点. 这也可作为向量减法的定义.