解析几何与几何片段

傅吉祥　姚一隽
复旦大学数学科学学院

2022 年 8 月 29 日

目录

第一章　三维空间的向量代数

我们生活在三维欧氏空间, 定义了长度, 方向, 角度等. 例如, 线段是有长度的, 两条直线是有夹角的, 力是有大小与方向的. 但在三维空间中, 并没有规定原点. 如果规定中国人民大会堂为原点, 另外的国家就要有意见了. 当然有时暂定人民大会堂为原点是有好处的, 例如在开十八大时, 全世界的目光都聚焦于此. 虽说三维空间中没有固定的直角坐标系, 但有时为了解决具体的问题, 可人为地建立一个理想的直角坐标系. 这就是解析几何的起源.

这一章讲三维空间的向量代数. 我们并不急着建立直角坐标系, 而在下一章第一节才引入它. 这样做既是抽象思维训练的需要, 也是为了强调一个向量与它的始点无关, 它可以在空间自由地, 无拘无束地平行移动而不引起改变.

1.1　向量的定义

向量在生活中无处不在, 具体的如箭, 抽象的如力与力矩等一些物理量. 物理学习惯把向量称为**矢量**.

定义 1. 三维欧氏空间 $\mathbb{E}^3$ 中既有大小又有方向的量称为**向量**.

在画图时向量用带上箭头的线段表示, 线段的长度表示向量的大小, 箭头代表向量的方向. 一个始点为 A, 终点为 B 的向量记作 $\overrightarrow{AB}$. 它的大小即为线段 AB 的长度, 记作 $|\overrightarrow{AB}|$. 如果无需强调一个向量的始点与终点, 则把它简记为 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 等, 相应的大小记作 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$. 本书常用小写的数学黑体[1]字母表示向量, 如用 $\mathbf{a}$ 表示向量 $\vec{a}$.

需要强调的是向量与它的始点无关, 只与它的长度和方向有关. 所以对一个向量作任意的平行移动后得到的向量与它相等. 如图 1.1 作平行四边形 $ABCD$, 则 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. 但是 $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, 因为虽然这两个向量的长度相等但方向相反.

定义 2. 与向量 $\mathbf{a}$ 大小相等方向相反的向量称为 $\mathbf{a}$ 的**逆向量**, 记作 $-\mathbf{a}$.

这样, 根据定义,

$$-(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}.$$

在图 1.1 中 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$. 规定长度等于零的向量为**零向量**, 记作 $\mathbf{0}$. 它没有方向, 可简记为 0.

[1] 指 Latex 语言 mathbf.

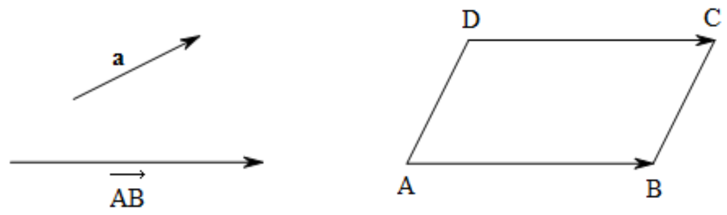

图 1.1: 向量的表示与平行移动

习题 1.1

1. 举出几个日常生活中向量的例子.
2. 根据逆向量的定义证明 $-(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}$.
3. 先在平面上建立一个直角坐标系, 再画以下向量:
   1) 一个长度是 3 厘米, 方向与 x 轴正向一致的向量;
   2) 两个长度是 4 厘米, 方向与 y 轴正向相反的向量;
   3) 三个长度是 5 厘米, 方向朝上且与 x 轴正向的夹角是 $\pi/4$ 的向量.
4. 在平面上画等式 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ 的示意图.

1.2 向量的线性运算

定义 3. 定义两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的**加法**如下. 将向量 $\mathbf{b}$ 作平行移动使得它的始点与 $\mathbf{a}$ 的终点重合后 得到一个向量 $\mathbf{c}$, 它的始点与终点分别是 $\mathbf{a}$ 的始点与 $\mathbf{b}$ 的终点. 向量 $\mathbf{c}$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的**和**, 记作 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$.

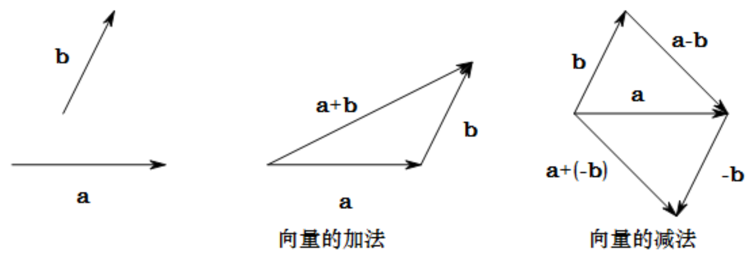

图 1.2: 向量的加减法

有了向量加法与逆向量的定义, 就可定义两个向量的**减法**. 向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的差 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 定义为

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

从图 1.2 向量的减法可以读出若向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的始点重合, 则向量 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 的始点与终点分别是向量 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 的终点. 这也可作为向量减法的定义.