



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学模型

(第三版)

谭永基 蔡志杰 编著



博学·数学系列



复旦大学出版社

www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

数学模型/谭永基,蔡志杰编著.—3版.—上海:复旦大学出版社,2019.8
(复旦博学·数学系列)
ISBN 978-7-309-14289-1

I. ①数… II. ①谭…②蔡… III. ①数学模型-高等学校-教材 IV. ①0141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第083227号

数学模型(第三版)

谭永基 蔡志杰 编著
责任编辑/陆俊杰

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路579号 邮编:200433
网址: fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>
门市零售: 86-21-65642857 团体订购: 86-21-65118853
外埠邮购: 86-21-65109143 出版部电话: 86-21-65642845
杭州长命印刷有限公司

开本 787×960 1/16 印张 28.5 字数 500 千
2019年8月第3版第1次印刷

ISBN 978-7-309-14289-1/O·668
定价: 48.00 元

如有印装质量问题, 请向复旦大学出版社有限公司出版部调换。
版权所有 侵权必究

目 录

第一章 引言	1
§ 1.1 什么是数学模型	1
§ 1.2 研究数学模型的意义	2
§ 1.3 数学模型的特点与方法	6
§ 1.4 学习本书的建议	8
第二章 驾驶问题	10
§ 2.1 问题的提出	10
§ 2.2 限定区域的问题	11
§ 2.3 具有优先方向的运动	12
§ 2.4 加速度有限制的运动	15
§ 2.5 曲率有限制的情形	18
习题	21
实践与思考	21
第三章 流水线设计	23
§ 3.1 问题的提出与简化	23
§ 3.2 模型的建立	24
§ 3.3 模型的求解和应用	30
§ 3.4 进一步的讨论	31
习题	31
实践与思考	32
第四章 数码相机定位	33
§ 4.1 引言	33
§ 4.2 针孔成像原理	33
§ 4.3 双目定位的数学模型与方法	35
§ 4.4 相机相对位置的确定	36
§ 4.5 外部参数标定的一种实现方法	37

习题	41
实践与思考	41
第五章 投资效益、加工次序及其他	42
§ 5.1 投资效益问题	42
§ 5.2 加工次序问题	47
§ 5.3 两辆平板车的装载问题	50
§ 5.4 拼板问题	55
习题	59
实践与思考	60
第六章 公务员招聘模型	62
§ 6.1 问题的提出	62
§ 6.2 择优录用模型	62
§ 6.3 考虑用人部门要求的模型	66
§ 6.4 考虑应聘者志愿的模型	69
习题	72
实践与思考	73
第七章 飞行管理问题	74
§ 7.1 问题的提出	74
§ 7.2 假设与记号	74
§ 7.3 非线性规划模型	75
§ 7.4 非线性规划模型的求解	79
§ 7.5 线性规划模型	82
习题	85
实践与思考	85
第八章 投入产出综合平衡模型	86
§ 8.1 引言	86
§ 8.2 价值型投入产出模型	87
§ 8.3 开放的投入产出模型	90
习题	94
第九章 经济学中的差分方程模型	95
§ 9.1 引言	95

41	§ 9.2 均衡价格模型.....	97
41	§ 9.3 乘数加速模型	101
42	习题.....	107
42	实践与思考.....	108
47	第十章 密码的加密与解密	109
50	§ 10.1 引言.....	109
55	§ 10.2 置换密码.....	110
59	§ 10.3 仿射变换密码.....	112
60	§ 10.4 Hill 密码	114
62	§ 10.5 公开密钥系统.....	118
62	习题.....	123
62	实践与思考.....	123
66	第十一章 CT 的图像重建	124
69	§ 11.1 引言.....	124
72	§ 11.2 基本原理.....	124
73	§ 11.3 数学模型的建立	128
74	§ 11.4 求解线性代数方程组的迭代法.....	130
74	§ 11.5 含有测量误差的处理.....	135
74	习题.....	140
75	实践与思考.....	141
79	第十二章 分子模型	144
82	§ 12.1 平面型碳氢化合物分子.....	144
85	§ 12.2 图和矩阵模型.....	145
85	§ 12.3 奇偶类顶点差的计算.....	148
86	§ 12.4 双键的配置.....	149
86	习题.....	152
87	第十三章 扫雪问题	154
90	§ 13.1 问题的提出.....	154
94	§ 13.2 单车双车道的情形.....	155
95	§ 13.3 单车单车道的情形.....	160
95	§ 13.4 双车双车道的情形.....	163

习题	164
实践与思考	165
第十四章 机器人避障问题	167
§ 14.1 问题的提出	167
§ 14.2 禁入区的确定	168
§ 14.3 单个目标点的最短路径	170
§ 14.4 模型的求解	173
§ 14.5 多个目标点的最短路径	176
习题	178
实践与思考	178
第十五章 房屋隔热经济效益核算	179
§ 15.1 问题的提出	179
§ 15.2 模型的建立	179
§ 15.3 模型的应用	183
习题	184
实践与思考	184
第十六章 为什么制造三级运载火箭	185
§ 16.1 问题的提出	185
§ 16.2 卫星的速度	186
§ 16.3 火箭推力问题	187
§ 16.4 火箭系统的质量	188
§ 16.5 理想化的可随时抛去结构质量的火箭	189
§ 16.6 多级火箭的速度公式	190
习题	193
第十七章 万有引力定律	194
§ 17.1 引言	194
§ 17.2 从开普勒三定律推出万有引力定律	195
§ 17.3 从万有引力定律推出开普勒三定律	198
习题	203
第十八章 生物群体模型	204
§ 18.1 单物种群体模型	204

· 164	§ 18.2 相互竞争的二物种群体系统·····	207
· 165	§ 18.3 一种弱肉强食模型·····	213
· 167	习题·····	217
· 167	实践与思考·····	217
· 168	第十九章 植物生长模型 ·····	219
· 170	§ 19.1 问题的提出·····	219
· 173	§ 19.2 植物生长过程中的能量转换·····	219
· 176	§ 19.3 初步模型·····	220
· 178	§ 19.4 考虑碳氮需求比例的模型·····	221
· 178	§ 19.5 根叶模型·····	226
· 179	习题·····	229
· 179	实践与思考·····	229
· 179	第二十章 用放射性同位素测定局部脑血流量 ·····	230
· 183	§ 20.1 问题的提出·····	230
· 184	§ 20.2 假设和建模·····	231
· 184	§ 20.3 参数的辨识·····	235
· 185	§ 20.4 模型的评价·····	238
· 185	习题·····	239
· 186	实践与思考·····	239
· 187	第二十一章 糖尿病检测模型 ·····	241
· 188	§ 21.1 葡萄糖耐量试验·····	241
· 189	§ 21.2 假设与糖代谢调节系统模型的建立·····	242
· 190	§ 21.3 模型的应用与评价·····	245
· 193	习题·····	247
· 194	实践与思考·····	248
· 194	第二十二章 风险决策 ·····	250
· 195	§ 22.1 设备的定期维修问题·····	250
· 198	§ 22.2 风险决策的矩阵形式·····	251
· 203	§ 22.3 最小期望机会损失原则·····	253
· 204	§ 22.4 决策树·····	254
· 204	习题·····	256

实践与思考	256
第二十三章 对策模型	257
§ 23.1 问题的提出	257
§ 23.2 两人零和纯策略对策	259
§ 23.3 混合策略对策	262
§ 23.4 在水雷战中的应用	265
§ 23.5 两人非零和对策	269
习题	276
实践与思考	277
第二十四章 机票超订策略模型	278
§ 24.1 问题的提出	278
§ 24.2 无超订的模型	278
§ 24.3 简单超订模型	279
§ 24.4 考虑赔偿的超订模型	280
§ 24.5 多票价模型	288
习题	293
实践与思考	293
第二十五章 随机模拟模型	298
§ 25.1 引言	298
§ 25.2 三门问题与计算机随机模拟方法	300
§ 25.3 随机数的生成	302
§ 25.4 码头卸货效率分析问题	304
§ 25.5 需求随机模拟存储模型	308
习题	312
实践与思考	313
第二十六章 乳腺癌的诊断	318
§ 26.1 问题的提出	318
§ 26.2 人工神经网络方法	318
§ 26.3 特征选择方法	326
习题	330
实践与思考	330

56	第二十七章 从容器中流出的液体	335
57	§ 27.1 问题的提出	335
57	§ 27.2 流体动力学方程组和伯努利定律	336
59	§ 27.3 液体排完时间的计算	339
62	§ 27.4 实际应用	341
65	习题	343
69	实践与思考	343
76	第二十八章 激光钻孔	345
77	§ 28.1 物理模型	345
78	§ 28.2 数学模型	346
78	§ 28.3 钻孔的极限速度	349
78	§ 28.4 摄动解	351
79	习题	356
80	实践与思考	356
88	第二十九章 洪水模型	357
93	§ 29.1 问题的提出	357
93	§ 29.2 模型的建立	357
98	§ 29.3 定解模型	360
98	§ 29.4 数值计算方法	362
100	§ 29.5 模型的改进	367
102	习题	368
104	实践与思考	368
108	第三十章 传染病模型	369
112	§ 30.1 问题的提出	369
113	§ 30.2 SI 模型	369
118	§ 30.3 SIS 模型	372
118	§ 30.4 SIR 模型	373
118	§ 30.5 定常出生的 SIR 模型	376
126	§ 30.6 更精致的模型	377
130	§ 30.7 参数辨识	379
130	习题	379

实践与思考	380
第三十一章 人口的预测与控制	381
§ 31.1 马尔萨斯模型和自限模型	381
§ 31.2 随机模型	383
§ 31.3 考虑年龄结构的人口模型	388
§ 31.4 人口控制	394
习题	401
实践与思考	401
第三十二章 交通流模型和路口交通管理	402
§ 32.1 交通流和连续性方程	402
§ 32.2 如何使隧道中的交通流量最大	404
§ 32.3 被火车阻隔的交通流	407
§ 32.4 路口交通管理	412
§ 32.5 路口等待时间的随机模型	416
§ 32.6 交通运输规划模型简介	420
习题	425
实践与思考	426
参考文献	427

第一章 引言

随着社会的发展和科技的进步,特别是近年来电子计算机技术的发展,数学愈来愈向其他科技领域渗透,数学模型的研究愈来愈广泛和深入,数学模型也逐步成为一门独立的课程在世界各地的大学中开设.我们将首先介绍什么是数学模型,研究数学模型有什么意义,以及学习和研究数学模型的正确方法是什么.

§ 1.1 什么是数学模型

近年来,数学模型成为一个十分流行的词汇.经济学家经常讨论一个国家的宏观经济数学模型或某一经济行为特定的数学模型;巨型的化工或钢铁联合企业的管理人员经常研究用于生产过程自动控制的数学模型;在企业管理、医药工程、环境与人口等领域,为了得到量化的规律,也离不开数学模型.那么,究竟什么是数学模型呢?

在现实世界中经常会遇到这样的问题,需要揭示某些数量的关系、模式或空间形式,数学就是解决这种问题的科学与技术.

数量规律和空间形式往往隐藏在各种五光十色的现象背后,要用数学去解决现实问题必须去粗取精、去伪存真,从各种现象中抽象出数学问题来.同时,现实世界的问题往往又是十分复杂的,在从实际中抽象出数学问题的过程中,我们必须忽略一些次要的因素,抓住主要的因素,作一些必要的简化,使抽象所得的数学问题可以用适当的方法进行求解.

以解决某个现实问题为目的,从该问题中抽象、归结出来的数学问题就称为数学模型.较著名的数学模型的定义是本德(Bender)给出的,他认为,数学模型是关于部分现实世界为一定目的而作的抽象、简化的数学结构.更简洁地,也可以认为数学模型是用数学术语对部分现实世界的描述.

既然数学模型是为解决现实问题而建立起来的,它必须反映现实,也就是反映现实问题的数量方面,然而既然是一种模型,它就不可能是现实问题的一种拷贝,它忽略了现实问题的许多与数量无关的因素,有时还忽略一些次要的数量因素,作了必要的简化,从而它在本质上更加集中地反映现实问题的数量规律.

构造数学模型不是易事,建立一个好的数学模型通常需要经过多次反复,即通过对现实问题的探求,经简化、抽象,建立初步的数学模型.再通过各种检验和评价发现模型的不足之处,然后作出改进,得到新的模型.这样的过程通常要重复多次才能得到理想的模型.建立数学模型的过程称为数学建模.

不难看出,用数学解决现实问题的第一步就是建立数学模型,而数学建模是一个有丰富内涵的复杂过程.人们必须掌握数学建模的科学的方法论,才能有效地用数学解决各类现实问题.

长期以来,大学的数学教学只重视讲授数学知识和方法,而忽略了培养训练从现实问题中建立数学模型的能力.于是,当学生们面临当今世界如此众多的需要用数学解决的问题时就显得束手无策了.从20世纪60年代起,愈来愈多的数学教育工作者意识到这一问题,陆续开设了数学模型课程.现在,在许多国家这门课程已作为学习应用数学的大学生的必修课程,还作为其他需要利用数学解决各自问题的许多学科的大学生课程.

在科学研究上,为各类应用问题探索更为有效的数学模型或者在新的领域中建立数学模型,也愈来愈受到重视.这往往还能促进发展新的应用数学理论与方法.

§ 1.2 研究数学模型的意义

数学模型有悠久的历史,数学是在实际应用的需求中产生的,要解决实际问题就必须建立数学模型,从这个意义上讲数学模型和数学有同样古老的历史.事实上,2000多年以前创立的欧几里得几何就是一个古老的数学模型.牛顿定律,特别是牛顿万有引力定律更是数学模型的一个光辉典范.

今天,数学以空前的广度与深度向其他科学技术领域渗透.过去很少应用数学的领域现在迅速走向定量化、数学化,须建立大量数学模型;在数学已经得到广泛应用的传统科技领域,由于新技术、新工艺的蓬勃兴起,提出了许多新问题,需要用数学去解决,也需要研究许多新的数学模型.随着电子计算机的普及,数学在许多高新技术上起着十分关键的作用,从而数学模型对科技发展的作用就更加直接和更为明显了,研究数学模型和数学建模就被赋予更为重要的意义.

一、数学模型在其他科学中的应用

物理和力学是数学应用的传统领域,其中有许多著名的数学模型.然而,以前数学在化学、生物等自然科学中应用很少.近年来,情况发生了显著的变化,这些学科迅速走向定量化,建立了许多数学模型,许多重要的问题有待于数学模型