

UMSS

大学数学科学丛书 — 38

# 基础实分析

徐胜芝 编著



科学出版社



## 内 容 简 介

本书是学习实分析课程的基础教材,讨论了实分析的基本理论和方法.第1章介绍了学习实分析的基本工具:集合运算及其规律、计数与基数运算律以及像实轴那样的完备序集中的极限理论.在此基础上,第2章讨论了测度的基本性质及其重要的扩张理论,接着讨论了集合与映射的可测性.第3章讨论了有广泛应用的积分及其基本性质,以及积分极限定理及其在累次积分中的应用.利用前三章建立起来的工具,第4章深入讨论了一元实函数的可微性质与微积分基本定理,讨论了卷积和 Fourier 变换这两个基本分析工具及其应用.

本书可作为高等院校数学专业本科生的学习用书,也可供相关专业的研究生作学习参考用书.

### 图书在版编目(CIP)数据

基础实分析/徐胜芝编著. —北京:科学出版社, 2019.9  
(大学数学科学丛书; 38)

ISBN 978-7-03-061713-2

I. ①基… II. ①徐… III. ①实分析-高等学校-教材 IV. ①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 120831 号

责任编辑:李静科 李 萍 / 责任校对:邹慧卿  
责任印制:吴兆东 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2019年9月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2019年9月第一次印刷 印张:18 1/2

字数:365 000

定价:88.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

# 目 录

## 《大学数学科学丛书》序

### 前言

|               |    |
|---------------|----|
| 第 1 章 关系与相关性  | 1  |
| 1.1 集合算术      | 1  |
| 1.1.1 集合比较与运算 | 1  |
| 1.1.2 集族与多元组  | 4  |
| 1.1.3 截口与映射   | 7  |
| 练习            | 11 |
| 1.2 二元关系      | 12 |
| 1.2.1 复合与逆    | 12 |
| 1.2.2 等价关系    | 16 |
| 1.2.3 顺序关系    | 19 |
| 练习            | 22 |
| 1.3 基数算术      | 23 |
| 1.3.1 对等集合    | 23 |
| 1.3.2 基数与其比较  | 26 |
| 1.3.3 基数运算    | 30 |
| 练习            | 33 |
| 1.4 完备序集      | 34 |
| 1.4.1 上确界与下确界 | 34 |
| 1.4.2 上极限与下极限 | 37 |
| 1.4.3 级数与乘积   | 41 |
| 练习            | 44 |
| 第 2 章 测度与可测性  | 46 |
| 2.1 可列加性      | 46 |
| 2.1.1 测度起源    | 46 |
| 2.1.2 集环      | 49 |
| 2.1.3 集函数     | 51 |
| 练习            | 54 |



|                   |     |
|-------------------|-----|
| 2.2 集族扩张          | 56  |
| 2.2.1 单调环         | 56  |
| 2.2.2 集族归纳法       | 60  |
| 练习                | 62  |
| 2.3 测度扩张          | 63  |
| 2.3.1 外测度法        | 63  |
| 2.3.2 基本性质        | 66  |
| 2.3.3 唯一扩张        | 69  |
| 练习                | 70  |
| 2.4 常用测度          | 71  |
| 2.4.1 正则性         | 71  |
| 2.4.2 映射与测度计算     | 74  |
| 2.4.3 可乘性         | 78  |
| 练习                | 81  |
| 2.5 可测映射          | 82  |
| 2.5.1 可测性         | 82  |
| 2.5.2 带号函数        | 85  |
| 2.5.3 复值函数        | 89  |
| 练习                | 92  |
| 2.6 函数序列          | 93  |
| 2.6.1 与测度无关的收敛性   | 94  |
| 2.6.2 与测度有关的收敛性   | 97  |
| 2.6.3 阅读材料        | 101 |
| 2.6.4 附录 (可测性的延伸) | 104 |
| 练习                | 107 |
| 第 3 章 积分与可积性      | 109 |
| 3.1 微量累积          | 109 |
| 3.1.1 积分简史        | 109 |
| 3.1.2 积分运算        | 113 |
| 3.1.3 常用积分        | 119 |
| 练习                | 121 |
| 3.2 极限定理          | 122 |
| 3.2.1 单调收敛性       | 122 |
| 3.2.2 控制收敛性       | 125 |



|                      |     |
|----------------------|-----|
| 3.2.3 变量代换           | 127 |
| 练习                   | 131 |
| 3.3 累次积分             | 133 |
| 3.3.1 乘积测度           | 133 |
| 3.3.2 重积分的计算         | 136 |
| 3.3.3 阅读材料           | 140 |
| 练习                   | 143 |
| 3.4 平均收敛             | 144 |
| 3.4.1 几个不等式          | 144 |
| 3.4.2 平均收敛与其特征       | 147 |
| 3.4.3 阅读材料           | 150 |
| 练习                   | 154 |
| 3.5 广义测度             | 155 |
| 3.5.1 带号情形           | 155 |
| 3.5.2 加权测度           | 158 |
| 3.5.3 测度比较           | 161 |
| 3.5.4 附录 (积分的其他定义方式) | 164 |
| 练习                   | 168 |
| 第 4 章 导数与可导性         | 170 |
| 4.1 围变函数             | 170 |
| 4.1.1 全变差            | 170 |
| 4.1.2 围变函数的性质        | 173 |
| 4.1.3 阅读材料           | 177 |
| 练习                   | 180 |
| 4.2 不定积分             | 181 |
| 4.2.1 导出数            | 181 |
| 4.2.2 绝对连续性          | 184 |
| 4.2.3 阅读材料           | 187 |
| 练习                   | 190 |
| 4.3 非匀测度             | 191 |
| 4.3.1 从单调函数到容度       | 191 |
| 4.3.2 凑微分与分部积分       | 195 |
| 4.3.3 阅读材料           | 198 |
| 练习                   | 201 |



|                      |     |
|----------------------|-----|
| 4.4 卷积运算             | 202 |
| 4.4.1 基本性质           | 202 |
| 4.4.2 近似幺元           | 206 |
| 4.4.3 光滑逼近           | 209 |
| 练习                   | 212 |
| 4.5 傅氏变换             | 213 |
| 4.5.1 基本性质           | 213 |
| 4.5.2 反演和 $L^2$ -等距性 | 217 |
| 4.5.3 速降函数           | 220 |
| 练习                   | 223 |
| 附录 1 Perron 积分       | 225 |
| 上密度和下密度              | 225 |
| 上积函数与下积函数            | 226 |
| 附录 2 从零开始            | 232 |
| 自然数与归纳法              | 232 |
| 整数与带余除法              | 235 |
| 广义实数                 | 239 |
| 极限与初等函数              | 243 |
| 复数与四元数               | 248 |
| 序数与超限归纳法             | 250 |
| 序数运算与基数              | 253 |
| 参考文献                 | 257 |
| 符号列表                 | 258 |
| 术语索引                 | 266 |
| 中外人名                 | 277 |
| 《大学数学科学丛书》已出版书目      | 281 |



## 第1章 关系与相关性

### 1.1 集合算术

现代数学的基础是集合论,其奠基者 Georg Cantor 认为集合是我们感觉或者思维中确定的个别对象的汇总,其中对象就是该集合的元素或成员.人们常将具有某种特定性质的具体或抽象对象全体归为一个集合.为避免悖论,本书所用集合都是基于某个恰当公理体系发展而来的,欲知详情者可参见文献 [7].

#### 1.1.1 集合比较与运算

以  $x \in A$  表示  $x$  是集合  $A$  的一个元素而  $y \notin B$  表示  $y$  不是  $B$  的一个元素.某些集合可随场合而改变名称,如实数全体  $\mathbb{R}$  可称为实数系、实数域或实轴.

某些集合的元素可用枚举法逐一列出.如  $\{0\}$  是个单点集——仅有一个元素者.自然数集  $\mathbb{N}$  和整数环  $\mathbb{Z}$  各枚举成  $\{0, 1, 2, \dots\}$  和  $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ . 省略号的意义应明确于其环境,否则会有歧义.如无前文,上述省略号可为  $\spadesuit A$ .

枚举的元素不分先后且重复者仅算一个,如  $\{1, 2\}$  和  $\{2, 1, 2, 1\}$  是相等集合——由同样一些元素组成.以式子  $A = B$  表示  $A$  和  $B$  是相等集合.

集合都可用描述法写成  $\{f(x)|P(x)\}$  或  $\{f(x):P(x)\}$  使  $P(x)$  和  $f(x)$  各是  $x$  具有的性质和产生的元素.如有理数域  $\mathbb{Q} := \{b/a|a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0\}$ , 符号  $:=$  表示将右端记成左端,而  $=$  表示将左端记成右端.以  $i$  代表虚数单位,则复数域或复平面  $\mathbb{C} := \{x + iy|x, y \in \mathbb{R}\}$ . 有时也将集合描述成  $\{x_i|i \in \alpha\}$ , 其中  $\alpha$  为指标集.

以  $\emptyset$  记空集——不含任何元素者,它可枚举成  $\{\}$ , 也可描述成  $\{x|x \neq x\}$ . 一般地,枚举法表示的集合自然可用描述法表示.两种方法还可混合使用.如

$$\{x_1, x_2 \in \mathbb{N} | x_1^2 = 4, x_2^2 = 9\} = \{2, 3\}.$$

注记 某些  $\{f(x)|P(x)\}$  不是集合,例有  $\{x|x = x\}$ . □

直观地,  $\{0\}$  是  $\{0, 1\}$  的一部分.一般地,称集合  $A$  是集合  $B$  的一个子集或  $B$  是  $A$  的一个超集指  $A$  的元素都属于  $B$  (即  $x \in A \Rightarrow x \in B$ ), 这记为  $A \subseteq B$  或  $B \supseteq A$  并读作“ $A$  含于  $B$ ”或“ $B$  包含  $A$ ”.以  $C \not\subseteq D$  表示  $C$  非  $D$  的子集.

常用  $P \Rightarrow Q$  表示“命题  $P$  为真时,命题  $Q$  为真”.而“ $P$  当且仅当  $Q$ ”代表“ $P$  为真的充要条件是  $Q$  为真”.“当”是充分性  $Q \Rightarrow P$ , “仅当”是必要性  $P \Rightarrow Q$ . 定义某个概念所用条件可视为充要条件,如整数  $x$  是偶数当且仅当它可被 2 整除.



例1 以 $\mathbb{R}$ 记负无穷 $-\infty$ 和全体实数 $x$ 及正无穷 $+\infty$ 组成的广义实轴, 其非空子集 $A$ 称为广义实数集. 规定 $-\infty < x < +\infty$ , 以下 $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ .

左开右闭区间 $(a, b] = \{t \in \mathbb{R} | a < t \leq b\}$ , 命 $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty]$ 且 $A_+ = A \cap \mathbb{R}_+$ .

左闭右开区间 $[a, b) = \{t \in \mathbb{R} | a \leq t < b\}$ , 命 $\mathbb{R}_- = [-\infty, 0)$ .

开区间 $(a, b) = \{t \in \mathbb{R} | a < t < b\}$ , 如实轴 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ .

闭区间 $[a, b] = \{t \in \mathbb{R} | a \leq t \leq b\}$ , 如广义实轴 $\mathbb{R} = [-\infty, +\infty]$ .

以上区间在 $b = a$ 时为退化区间: 前三者皆空, 第四者为单点集 $\{a\}$ .  $\square$

当 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ 时, 称 $A$ 是 $B$ 的一个真子集, 并记为 $A \subset B$ (即 $A$ 真含于 $B$ )或 $B \supset A$ (即 $B$ 真包含 $A$ ). 如 $\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ 且 $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ .

用逻辑符号可简化推理过程, 如 $\forall, \exists, \wedge, \vee$ 依次表示“任意”“有个”“并且”“或者”. 它们在否定命题时应依次换成 $\exists, \forall, \vee, \wedge$ . 如有以下互否命题:

$$(\exists x \in X : x = 0) \wedge (\forall x \in X : x \neq 1),$$

$$(\forall x \in X : x \neq 0) \vee (\exists x \in X : x = 1).$$

集合算术律 最小性: (空集是任何集合的子集) $\emptyset \subseteq A$ .

自反性: (任何集合是自身的子集) $A \subseteq A$ .

反称性: 当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 时,  $A = B$ .

传递性: 当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$ 时,  $A \subseteq C$ (待续).

提示传递性  $x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$ .  $\square$

为直观地理解集合, 可用图形示意, 这是所谓的 Venn 图法. 图形在选择上有很大的随意性, 一旦选好便不能随意变化. 下面各用椭圆和矩形示意集合 $A$ 和 $B$ .

作并集  $A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$ , 它由 $A$ 和 $B$ 的所有元素组成, 公共元素不必重复写. 如 $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ 及 $(-\infty, 6] \cup [3, +\infty) = \mathbb{R}$ .

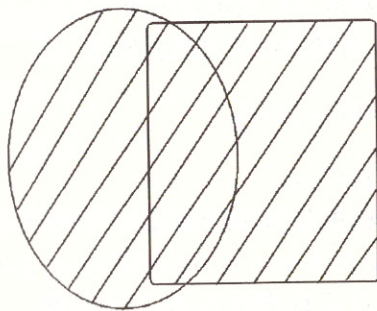


图1 阴影部分是并集

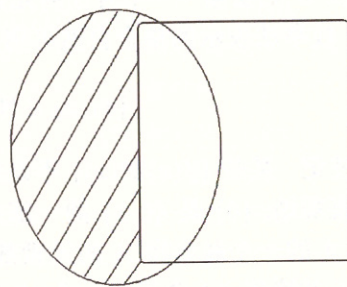


图2 阴影部分是差集

作差集  $A \setminus B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ , 它由不属于 $B$ 的 $A$ 中元素组成, 读成“ $A$ 减 $B$ ”. 如 $\{1, 2\} \setminus \{2, 4\} = \{1\}$ 且 $(-\infty, 6] \setminus [3, +\infty) = (-\infty, 3)$ .



固定集合  $X$ . 若  $A \subseteq X$ , 以  $\complement A$  或  $A^c$  记  $A$  在全集  $X$  的补集或余集  $X \setminus A$ . 补集有相对性, 如无理数集  $\mathbb{I}$  以自身为全集时有补集  $\emptyset$ , 但以实轴为全集时有补集  $\mathbb{Q}$ .

作对称差  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ , 它由只属于  $A$  和  $B$  之一的元素组成, 不含两者的公共元素. 如  $\{1, 2\} \Delta \{2, 3\} = \{1, 3\}$ .

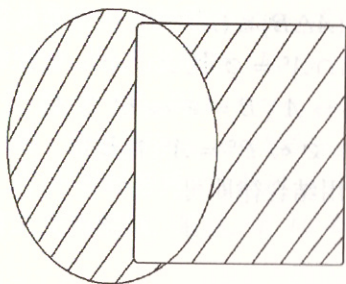


图 3 阴影部分是对称差

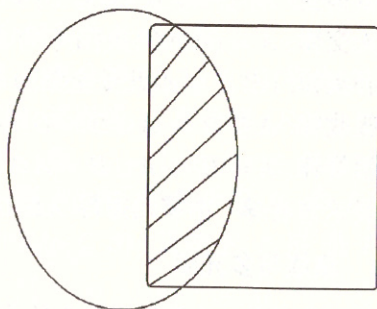


图 4 阴影部分是交集

作交集  $A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ , 如  $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$ . 交集由公共元素组成. 无公共元素的集合  $A$  和  $B$  是互斥集合或不交集合, 它们之并集称为无交并且记为  $A \uplus B$  或  $A \sqcup B$ . 如  $\{1, 2\} \uplus \{2, 3\} = \{1, 3\}$  且  $\{0, 1\} \uplus \{3, 4\} = \{0, 1, 3, 4\}$ .

像  $\{1, 2\}$  这样不借助于省略号可枚举者应是有限的. 称空集是 0 元有限集, 递归地, 称  $F$  是一个  $n$  元有限集指某个  $a \in F$  使  $F \setminus \{a\}$  为  $n-1$  元有限集. 此  $n$  为  $F$  的计数且记为  $|F|_0$ . 这些概念与  $a$  的取法无关: 无关性在  $n=1$  时为真, 归纳地设无关性在  $n=k$  时为真. 当  $n=k+1$  且  $b$  属于  $F \setminus \{a\}$  时,  $(F \setminus \{a\}) \setminus \{b\}$  为  $k-1$  元有限集且等于  $(F \setminus \{b\}) \setminus \{a\}$ . 故  $F \setminus \{b\}$  是  $k$  元有限集.

以  $2^X$  记  $X$  的子集全体  $\{A | A \subseteq X\}$  且称为幂集, 其中有限者全体记为  $\text{fin } X$ .

命题 1 (有限集的遗传性) 有限集  $E$  的真子集  $D$  是有限的且  $|D|_0 < |E|_0$ .

证明 当  $|E|_0 = 1$  时,  $D = \emptyset$ ; 归纳地设  $|E|_0 = k$  时结论对. 当  $|E|_0 = k+1$  时, 有个  $a \in E$  使  $D$  为  $E \setminus \{a\}$  或其真子集. 故  $D$  是有限的且  $|D|_0 \leq k$ .  $\square$

自然数集是一例无限集——非有限者, 否则得谬式  $1 + \max \mathbb{N} \notin \mathbb{N}$ . 结合以上命题知  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  都是无限集. 无限集  $G$  的计数  $|G|_0$  都是  $+\infty$ .

计数可参与广义实数的算术 (见于 1.4 节), 但不能细分无限集 (见于 1.3 节).

集合算术律 (续) 三角不等式:  $A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$ .

下定向性:  $A$  和  $B$  有个公共子集  $C$  (可命  $C = A \cap B$ ).

上定向性:  $A$  和  $B$  有个公共超集  $D$  (可命  $D = A \cup B$ ).

零元律:  $A \cup \emptyset = A \setminus \emptyset = A$  且  $A \cap \emptyset = A \Delta A = \emptyset$ .

结合律:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  (这因此可写成  $A \cup B \cup C$ ).

结合律:  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  (这因此可写成  $A \cap B \cap C$ ).