UMSS

大学数学科学丛书 —— 38

基础实分析

徐胜芝　编著

科学出版社

内 容 简 介

本书是学习实分析课程的基础教材，讨论了实分析的基本理论和方法. 第 1 章介绍了学习实分析的基本工具: 集合运算及其规律、计数与基数运算律以及像实轴那样的完备序集中的极限理论. 在此基础上，第 2 章讨论了测度的基本性质及其重要的扩张理论，接着讨论了集合与映射的可测性. 第 3 章讨论了有广泛应用的积分及其基本性质，以及积分极限定理及其在累次积分中的应用. 利用前三章建立起来的工具，第 4 章深入讨论了一元实函数的可微性质与微积分基本定理，讨论了卷积和 Fourier 变换这两个基本分析工具及其应用.

本书可作为高等院校数学专业本科生的学习用书，也可供相关专业的研究生作学习参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

基础实分析/徐胜芝编著. —北京：科学出版社, 2019.9
(大学数学科学丛书; 38)
ISBN 978-7-03-061713-2

Ⅰ. ①基… Ⅱ. ①徐… Ⅲ. ①实分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 120831 号

责任编辑：李静科 李 萍 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：吴兆东 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019 年 9 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2019 年 9 月第一次印刷 印张：18 1/2
字数：365 000

定价：88.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

目 录

第 1 章　关系与相关性

1.1　集 合 算 术

现代数学的基础是集合论, 其奠基者 Georg Cantor 认为集合是我们感觉或者思维中确定的个别对象的汇总, 其中对象就是该集合的元素或成员. 人们常将具有某种特定性质的具体或抽象对象全体归为一个集合. 为避免悖论, 本书所用集合都是基于某个恰当公理体系发展而来的, 欲知详情者可参见文献 [7].

1.1.1　集合比较与运算

以 $x \in A$ 表示 x 是集合 A 的一个元素而 $y \notin B$ 表示 y 不是 B 的一个元素. 某些集合可随场合而改变名称, 如实数全体 $\mathbb{R}$ 可称为实数系、实数域或实轴.

某些集合的元素可用枚举法逐一列出. 如 $\{0\}$ 是个单点集——仅有一个元素者. 自然数集 $\mathbb{N}$ 和整数环 $\mathbb{Z}$ 各枚举成 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ 和 $\{0, \pm1, \pm2, \cdots\}$. 省略号的意义应明确于其环境, 否则会有歧义. 如无前文, 上述省略号可为 ♠A.

枚举的元素不分先后且重复者仅算一个, 如 $\{1, 2\}$ 和 $\{2, 1, 2, 1\}$ 是相等集合——由同样一些元素组成. 以式子 $A = B$ 表示 A 和 B 是相等集合.

集合都可用描述法写成 $\{f(x)|P(x)\}$ 或 $\{f(x) : P(x)\}$ 使 $P(x)$ 和 $f(x)$ 各是 x 具有的性质和产生的元素. 如有理数域 $\mathbb{Q} := \{b/a|a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0\}$, 符号:= 表示将右端记成左端, 而 =: 表示将左端记成右端. 以 i 代表虚数单位, 则复数域或复平面 $\mathbb{C} := \{x + \mathrm{i}\, y|x, y \in \mathbb{R}\}$. 有时也将集合描述成 $\{x_i|i \in \alpha\}$, 其中 α 为指标集.

以 $\varnothing$ 记空集——不含任何元素者, 它可枚举成 $\{\}$, 也可描述成 $\{x|x \neq x\}$. 一般地, 枚举法表示的集合自然可用描述法表示. 两种方法还可混合使用. 如

$$\{x_1, x_2 \in \mathbb{N}|x_1^2 = 4, x_2^2 = 9\} = \{2, 3\}.$$

注记　某些 $\{f(x)|P(x)\}$ 不是集合, 例有 $\{x|x = x\}$. □

直观地, $\{0\}$ 是 $\{0, 1\}$ 的一部分. 一般地, 称集合 A 是集合 B 的一个子集或 B 是 A 的一个超集指 A 的元素都属于 B(即 $x \in A \Rightarrow x \in B$), 这记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ 并读作 "A 含于 B" 或 "B 包含 A". 以 $C \nsubseteq D$ 表示 C 非 D 的子集.

常用 P⇒Q 表示 "命题 P 为真时, 命题 Q 为真". 而 "P当且仅当Q" 代表 "P 为真的充要条件是 Q 为真". "当" 是充分性 Q⇒P, "仅当" 是必要性 P⇒Q. 定义某个概念所用条件可视为充要条件, 如整数 x 是偶数当且仅当它可被 2 整除.

例 1　以 $\overline{\mathbb{R}}$ 记负无穷 $-\infty$ 和全体实数 x 及正无穷 $+\infty$ 组成的*广义实轴*, 其非空子集 A 称为*广义实数集*. 规定 $-\infty < x < +\infty$, 以下 $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$.

左开右闭区间 $(a, b] = \{t \in \overline{\mathbb{R}} | a < t \leqslant b\}$, 命 $\overline{\mathbb{R}}_+ = (0, +\infty]$ 且 $A_+ = A \cap \overline{\mathbb{R}}_+$.

左闭右开区间 $[a, b) = \{t \in \overline{\mathbb{R}} | a \leqslant t < b\}$, 命 $\overline{\mathbb{R}}_- = [-\infty, 0)$.

开区间 $(a, b) = \{t \in \overline{\mathbb{R}} | a < t < b\}$, 如实轴 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

闭区间 $[a, b] = \{t \in \overline{\mathbb{R}} | a \leqslant t \leqslant b\}$, 如广义实轴 $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

以上区间在 $b = a$ 时为**退化区间**: 前三者皆空, 第四者为单点集 $\{a\}$. □

当 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ 时, 称 A 是 B 的一个*真子集*, 并记为 $A \subset B$(即 A 真含于 B) 或 $B \supset A$(即 B 真包含 A). 如 $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ 且 $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$.

用逻辑符号可简化推理过程, 如 $\forall, \exists, \wedge, \vee$ 依次表示"任意" "有个" "并且" "或者". 它们在否定命题时应依次换成 $\exists, \forall, \vee, \wedge$. 如有以下互否命题:

$$(\exists x \in X : x = 0) \wedge (\forall x \in X : x \neq 1),$$
$$(\forall x \in X : x \neq 0) \vee (\exists x \in X : x = 1).$$

集合算术律　最小性: (空集是任何集合的子集)$\varnothing \subseteq A$.

自反性: (任何集合是自身的子集) $A \subseteq A$.

反称性: 当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 时, $A = B$.

传递性: 当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$ 时, $A \subseteq C$(待续).

提示传递性　$x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$. □

为直观地理解集合, 可用图形示意, 这是所谓的 Venn 图法. 图形在选择上有很大随意性, 一旦选好便不能随意变化. 下面各用椭圆和矩形示意集合 A 和 B.

作并集　$A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$, 它由 A 和 B 的所有元素组成, 公共元素不必重复写. 如 $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ 及 $(-\infty, 6] \cup [3, +\infty) = \mathbb{R}$.

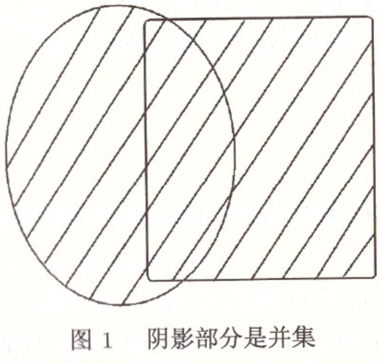

图 1　阴影部分是并集

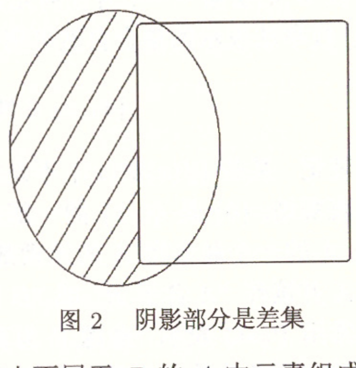

图 2　阴影部分是差集

作差集　$A \setminus B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$, 它由不属于 B 的 A 中元素组成, 读成 "A 减 B". 如 $\{1, 2\} \setminus \{2, 4\} = \{1\}$ 且 $(-\infty, 6] \setminus [3, +\infty) = (-\infty, 3)$.

固定集合 X. 若 $A\subseteq X$, 以 $\complement A$ 或 A^c 记 A 在全集X 的补集 或余集$X\setminus A$. 补集有相对性, 如无理数集 $\mathbb{J}$ 以自身为全集时有补集 $\varnothing$, 但以实轴为全集时有补集 $\mathbb{Q}$.

作对称差 $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, 它由只属于 A 和 B 之一的元素组成, 不含两者的公共元素. 如 $\{1,2\}\triangle\{2,3\}=\{1,3\}$.

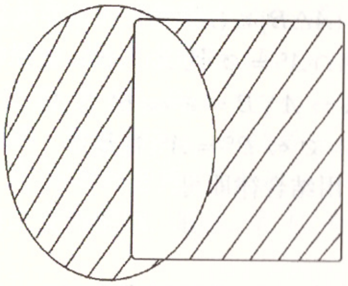

图 3　阴影部分是对称差

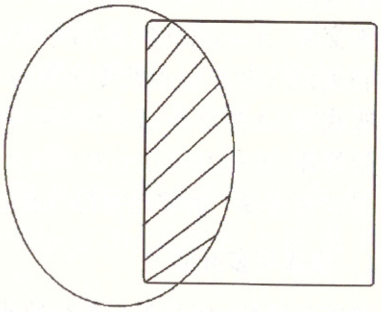

图 4　阴影部分是交集

作交集 $A\cap B=\{x|(x\in A)\wedge(x\in B)\}$, 如 $\{1,2\}\cap\{2,3\}=\{2\}$. 交集由公共元素组成. 无公共元素的集合 A 和 B 是互斥集合或不交集合, 它们之并集称为无交并且记为 $A\uplus B$ 或 $A\sqcup B$. 如 $(1,2]\uplus(2,3]=(1,3]$ 且 $\{0,1\}\uplus\{3,4\}=\{0,1,3,4\}$.

像 $\{1,2\}$ 这样不借助于省略号可枚举者应是有限的. 称空集是 0 元有限集, 递归地, 称 F 是一个 n 元有限集指某个 $a\in F$ 使 $F\setminus\{a\}$ 为 $n-1$ 元有限集. 此 n 为 F 的计数 且记为 $|F|_0$. 这些概念与 a 的取法无关: 无关性在 $n=1$ 时为真, 归纳地设无关性在 $n=k$ 时为真. 当 $n=k+1$ 且 b 属于 $F\setminus\{a\}$ 时, $(F\setminus\{a\})\setminus\{b\}$ 为 $k-1$ 元有限集且等于 $(F\setminus\{b\})\setminus\{a\}$. 故 $F\setminus\{b\}$ 是 k 元有限集.

以 2^X 记 X 的子集全体 $\{A|A\subseteq X\}$ 且称为幂集, 其中有限者全体记为 $\operatorname{fin}X$.

命题 1 (有限集的遗传性)　有限集 E 的真子集 D 是有限的且 $|D|_0<|E|_0$.

证明　当 $|E|_0=1$ 时, $D=\varnothing$; 归纳地设 $|E|_0=k$ 时结论对. 当 $|E|_0=k+1$ 时, 有个 $a\in E$ 使 D 为 $E\setminus\{a\}$ 或其真子集. 故 D 是有限的且 $|D|_0\leqslant k$. □

自然数集是一例无限集 ——非有限者, 否则得谬式 $1+\max\mathbb{N}\notin\mathbb{N}$. 结合以上命题知 $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 都是无限集. 无限集 G 的计数 $|G|_0$ 都是 $+\infty$.

计数可参与广义实数的算术 (见于 1.4 节), 但不能细分无限集 (见于 1.3 节).

集合算术律 (续)　三角不等式: $A\triangle C\subseteq(A\triangle B)\cup(B\triangle C)$.

下定向性: A 和 B 有个公共子集 C(可命 $C=A\cap B$).

上定向性: A 和 B 有个公共超集 D(可命 $D=A\cup B$).

零元律: $A\cup\varnothing=A\setminus\varnothing=A$ 且 $A\cap\varnothing=A\triangle A=\varnothing$.

结合律: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$(这因此可写成 $A\cup B\cup C$).

结合律: $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$(这因此可写成 $A\cap B\cap C$).