

多复变

嵇庆春

2022 年 10 月 9 日

目录

目录	i
第零章 前言	1
第一章 层论	3
1.1 交换群层	3
1.2 Čech 上同调	6
1.3 仿紧性	12
1.4 仿紧 T_2 空间上的交换群层	14
1.5 正合列	16
1.6 Godement 分解	22
1.7 $\mu_* \mathcal{S}$	30
1.8 凝聚层	32
第二章 全纯函数	39
2.1 全纯函数的定义	39
2.2 隐函数定理	42
2.3 全纯延拓	44
2.4 Dolbeault 引理	49
第三章 Oka 凝聚定理	55
3.1 Weierstrass 预备定理	55
3.2 Oka 定理	58

第四章 Cartan 定理 B	61
4.1 Oka's syzygies	61
4.2 $H^q(\Delta, \mathcal{S})$	67
4.3 全纯凸性	69
第五章 Cartan 定理 B 的应用	75
5.1 Cartan 定理 A	75
5.2 全纯凸性的等价描述	76
5.3 $H^p(\Omega, \mathbb{C})$	81
5.4 Cousin 问题	81
5.5 几何完备交	83
5.6 tba	87
5.7 Behnke-Stein 定理	89
第六章 解析集	93
6.1 tba 解析集	93
6.2 tba 全纯延拓	93
6.3 tba 正则点集	94
6.4 tba	95
6.5 解析分歧覆盖	96
第七章 解析集的结构	107
7.1 tba $\mathcal{O}_n$	107
7.2 tba 不可约	109
7.3 环的整扩张 (I)	111
7.4 tba	112
7.5 环的整扩张 (II)	114
7.6 解析集的局部描述	118
第八章 Oka-Cartan 定理	133
8.1 tba	133
8.2 tba	134
8.3 Oka-Cartan 定理	135

8.4	Sing A 的解析性	136
8.5	延拓定理	138
8.6	维数公式	139
8.7	亚纯函数	141
第九章 解析空间		143
9.1	解析空间的定义	143
9.2	$\widehat{\mathcal{O}}_X$	151
9.3	tba	155
9.4	全纯映射	158
9.5	正规化	158
	参考文献	159

第零章 前言

TBA

第一章 层论

在这一节中, X 是一个拓扑空间.

1.1 交换群层

1.1.1 设 $\mathcal{S}$ 是一个拓扑空间, $\pi: \mathcal{S} \rightarrow X$ 是连续映射, 记 $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S} := \bigcup_{x \in X} (\pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x))$, 并在 $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}$ 上给定 $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ 的子空间拓扑. 当以下条件成立时, 我们称 $(\mathcal{S}, \pi)$ 为 X 上的一个**交换群层** (有时会简称 $\mathcal{S}$ 为 X 上的一个交换群层):

- (i) $\pi(\mathcal{S}) = X$, $\pi: \mathcal{S} \rightarrow X$ 是局部同胚;
- (ii) 对 $\forall x \in X$, $\mathcal{S}_x := \pi^{-1}(x)$ 是一个交换群;
- (iii) $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, $(u, v) \mapsto u - v$ 是连续映射.

• 对任意开集 $V \subseteq X$, 定义 $\Gamma(V, \mathcal{S}) := \{\text{连续映射 } s: V \rightarrow \mathcal{S} \mid s(x) \in \mathcal{S}_x, \forall x \in V\}$. 我们称 $s \in \Gamma(V, \mathcal{S})$ 为 $\mathcal{S}$ 在 V 上的一个**截面**. $\Gamma(V, \mathcal{S})$ 上有自然的交换群结构:

$$\begin{aligned} \Gamma(V, \mathcal{S}) \times \Gamma(V, \mathcal{S}) &\rightarrow \Gamma(V, \mathcal{S}) \\ (s, t) &\mapsto (s + t)(x) := s(x) + t(x), \quad \forall x \in V. \end{aligned}$$

- 对 $\forall s \in \Gamma(V, \mathcal{S})$, $\pi \circ s = \text{id}_V \Rightarrow s$ 是 π 的右逆元. 再由条件 (i) 可知:

$$\{s(V) \mid V \subseteq X \text{ 是开集}, s \in \Gamma(V, \mathcal{S})\} \text{ 是 } \mathcal{S} \text{ 的一个拓扑基.} \quad (1.1)$$

- 令 $0: X \rightarrow \mathcal{S}$, $x \mapsto 0_x(\mathcal{S}_x \text{ 的零元})$, 则 $0 \in \Gamma(V, \mathcal{S})$.

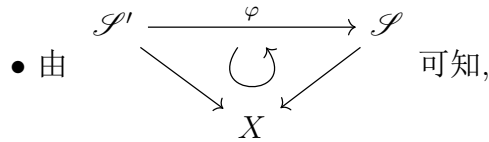
• 任取一个交换群 G , 在 G 上给定离散拓扑, 在 $G_X := G \times X$ 上给定乘积拓扑. 令 $\pi : G_X \rightarrow X$ 为自然的投影映射, 则 (G_X, π) 是 X 上的一个交换群层. 由定义可知, 对任意开集 $V \subseteq X$, $\Gamma(V, G_X)$ 同构于 {从 V 到 G 的局部常值映射}. 因此, 我们称 G_X 为常值层.

• 任取 $Y \subseteq X$, 在 $Y \subseteq X$ 和 $\mathcal{S}_Y := \pi^{-1}(Y) \subseteq \mathcal{S}$ 给定子空间拓扑, 则 $(\mathcal{S}_Y, \pi|_{\mathcal{S}_Y})$ 是 Y 上的一个交换群层.

1.1.2 设 $\mathcal{S}', \mathcal{S}$ 均为 X 上的交换群层, 我们称满足如下条件的 $\varphi : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$ 为从 $\mathcal{S}'$ 到 $\mathcal{S}$ 的同态:

(i) φ 是连续映射;

(ii) 对 $\forall x \in X$, $\varphi(\mathcal{S}'_x) \subseteq \mathcal{S}_x$ 且 $\varphi : \mathcal{S}'_x \rightarrow \mathcal{S}_x$ 是群同态.



φ 是局部同胚. (1.2)

• 由(1.1)可知: 当(ii)成立时, (i) $\Leftrightarrow \varphi(\Gamma(V, \mathcal{S}')) \subseteq (V, \mathcal{S})$, 对任意开集 $V \subseteq X$ 成立.

1.1.3 设 $(\mathcal{S}, \pi)$ 是 X 上的交换群层, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ 满足:

(i) $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{S}$ 的开子集;

(ii) $\mathcal{T} \cap \mathcal{S}_x$ 是 $\mathcal{S}_x$ 的子群 ($\forall x \in X$).

由定义可知, $(\mathcal{T}, \pi|_{\mathcal{T}})$ 是 X 上的一个交换群层, 并且包含映射 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ 是从 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{S}$ 的同态, 我们称 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{S}$ 的子层.

练习: 设 $\varphi : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$ 是层同态, 则 $\mathcal{Im} \varphi := \varphi(\mathcal{S}')$, $\mathcal{Ker} \varphi := \cup_{x \in X} \varphi^{-1}(0_x)$ 分别是 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 的子层.

• 设 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{S}$ 的子层, 定义 $\mathcal{S}/\mathcal{T} := \sqcup_{x \in X} \mathcal{S}_x / \mathcal{T}_x$. 由定义可知: 存在唯一映射 $\tilde{\pi} : \mathcal{S}/\mathcal{T} \rightarrow X$ 使得 $\tilde{\pi}^{-1}(x) = \mathcal{S}_x / \mathcal{T}_x, \forall x \in X$;

存在唯一映射 $q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/\mathcal{T}$ 使得 $q: \mathcal{S}_x \rightarrow \mathcal{S}_x/\mathcal{T}_x$ 是商同态, $\forall x \in X$.

在 $\mathcal{S}/\mathcal{T}$ 上取由 $q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/\mathcal{T}$ 确定的商拓扑.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & & \\ \downarrow q & \searrow \pi & \\ \mathcal{S}/\mathcal{T} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & X \end{array} \quad \Rightarrow \tilde{\pi} \text{ 是连续映射.}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} \oplus \mathcal{S} & \xrightarrow{\text{减法}} & \mathcal{S} \\ \downarrow q \times q|_{\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}} & \searrow & \downarrow q \\ \mathcal{S}/\mathcal{T} \oplus \mathcal{S}/\mathcal{T} & \xrightarrow{\text{减法}} & \mathcal{S}/\mathcal{T} \end{array} \quad \Rightarrow \mathcal{S}/\mathcal{T} \text{ 上的减法运算是连续的.}$$

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S} \text{ 是开集} \Rightarrow q \text{ 是开映射. 再由} \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & & \\ \downarrow q & \searrow \pi & \\ \mathcal{S}/\mathcal{T} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & X \end{array} \quad \text{和(1.1)可}$$

知, $\tilde{\pi}$ 是局部同胚.

因此, $(\mathcal{S}/\mathcal{T}, \tilde{\pi})$ 是 X 上的一个交换群层 (商层), $q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/\mathcal{T}$ 是层同态.

- 对任意开集 $V \subseteq X$,

$$0 \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{T}) \hookrightarrow \Gamma(V, \mathcal{S}) \xrightarrow{q \circ} \Gamma(V, \mathcal{S}/\mathcal{T}) \text{ 是正合列,} \quad (1.3)$$

但是, $q \circ: \Gamma(V, \mathcal{S}) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{S}/\mathcal{T})$ 一般不是满射:

取 X 为一个连通的 T_1 -空间, $x_1 \neq x_2 \in X$. 考虑 X 上的常值层 $G_X = G \times X$. 令 $\mathcal{S} := (G \times X \setminus \{x_1, x_2\}) \cup (\{0\} \times \{x_1, x_2\}) \subseteq G_X$, 其中 0 是 G 的零元. 由于 X 是 T_1 -空间, $X \setminus \{x_1, x_2\}$ 是 X 的开子集. 从而, $\mathcal{S} = (G \times X \setminus \{x_1, x_2\}) \cup (\{0\} \times X)$ 是 G_X 的开子集. 再由定义可知 $\mathcal{S}$ 是 G_X 的子层.

X 连通 $\Rightarrow \forall s \in \Gamma(X, G_X)$ 均为常值映射.

由定义可知:

$$\begin{aligned}\Gamma(X, G_X/\mathcal{S}) &\xrightarrow{\cong} G \oplus G \\ s &\mapsto (s(x_1), s(x_2)).\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 当 $G \neq \{0\}$ 时, $q \circ \cdot : \Gamma(X, G_X) \rightarrow \Gamma(X, G_X/\mathcal{S})$ 不是满射.

1.2 Čech 上同调

以下记 $\mathcal{S}$ 为 X 上的一个交换群层.

1.2.1 $H^q(\mathcal{V}, \mathcal{S})$, $q \geq 0$, $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 X 的一个开覆盖.

$$\bullet C^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}) := \left\{ f \in \prod_{\lambda_0, \dots, \lambda_q \in \Lambda} \Gamma(V_{\lambda_0, \dots, \lambda_q}, \mathcal{S}) \left| \begin{array}{l} f_{\lambda_0 \dots \lambda_i \dots \lambda_j \dots \lambda_q} = -f_{\lambda_0 \dots \lambda_j \dots \lambda_i \dots \lambda_q}, \\ \forall 0 \leq i < j \leq q. \end{array} \right. \right\},$$

其中, $V_{\lambda_0, \dots, \lambda_q} := V_{\lambda_0} \cap \dots \cap V_{\lambda_q}$.

$C^q(\mathcal{V}, \mathcal{S})$ 上有自然的交换群结构.

• 定义

$$\delta^q : C^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{V}, \mathcal{S})$$

$$f \mapsto (\delta^q f)_{\lambda_0 \dots \lambda_{q+1}} := \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i f_{\lambda_0 \dots \widehat{\lambda}_i \dots \lambda_{q+1}} \Big|_{V_{\lambda_0 \dots \lambda_{q+1}}}.$$

δ^q 是群同态, 且 $\delta^{q+1} \circ \delta^q = 0, \forall q \geq 0$.

记 $Z^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}) := \text{Ker } \delta^q$, $B^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}) := \text{Im } \delta^{q-1}$, $H^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}) := Z^q(\mathcal{V}, \mathcal{S})/B^q(\mathcal{V}, \mathcal{S})$, $\forall q \geq 0$, 其中 $C^{-1}(\mathcal{V}, \mathcal{S}) := 0, \delta^{-1} := 0$.

由定义可得,

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{V}} : \Gamma(X, \mathcal{S}) &\xrightarrow{\cong} H^0(\mathcal{V}, \mathcal{S}) = Z^0(\mathcal{V}, \mathcal{S}) \\ s &\mapsto f_\lambda := s|_{V_\lambda}.\end{aligned}\tag{1.4}$$

1.2.2 加细

设 $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in A}$ 是 X 的两个开覆盖, 我们称 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{U}$ 的加细 (记作 $\mathcal{V} \succ \mathcal{U}$) 是指: 存在加细映射 $\nu : \Lambda \rightarrow A$ 使得 $V_\lambda \subseteq U_{\nu(\lambda)}, \forall \lambda \in \Lambda$.