荣誉课程《代数拓扑与微分形式》

傅吉祥

教材

Bott and Tu: Differential Forms in Algebraic Topology

2021-06-20

1. $\mathbb{R}^n$ 上 de Rham 复形
2. 流形上微积分
3. MV 序列
4. Poincaré 引理
5. Poincaré 对偶
6. Künneth 公式
7. 向量丛基础
8. Thom 同构
9. Poincaré 对偶与 Thom 类
10. 平面丛 Thom 类的显式表示
11. 广义 MV 原理
12. 显式同构
13. Čech 上同调
14. 球面丛
15. Hopf 指标定理
16. 再论 Poincaré 对偶
17. 再论 Thom 同构
18. 单纯复形理论
19. 单值性
20. 谱序列
21. 双复形的谱序列
22. 谱序列的应用
23. 整系数奇异同调
24. 奇异上同调
25. 道路纤维化
26. 纤维化的同伦序列
27. Hurewicz 同构定理
28. EM 空间
29. $\pi_4(S^3)$ 与 $\pi_5(S^3)$ 的计算

遵从原著

感谢同学

2020年上半年输入

1. $\mathbb{R}^n$ 上 de Rham 复形

de Rham 上同调是流形的最重要微分同胚不变量.

这次课首先在 $\mathbb{R}^n$ 上定义 de Rham 上同调并计算几个例子; 接着在 $\mathbb{R}^n$ 上定义紧上同调; 最后回忆一些与微分复形有关的概念, 如复形的短正合序列, 上同调的长正合序列, 以及连接同态.

- $\mathbb{R}^n$ 的 de Rham 上同调
- 紧上同调
- 微分复形

$\mathbb{R}^n$ 的 de Rham 上同调

设 $\mathbb{R}^n$ 是 n 维欧氏空间, $x_1, \ldots, x_n$ 是其上线性坐标. 在自变量的微分 $dx_1, \ldots, dx_n$ 之间引入符号 $\wedge$, 它满足:

$$dx_i \wedge dx_i = 0,$$
$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i, \; i \neq j.$$

定义实向量空间

$$\Omega^* = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{1, \, dx_i, \underset{i<j}{dx_i \wedge dx_j}, \, \underset{i<j<k}{dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k}, \, \ldots, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\}.$$

它的维数是 $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$. 显然 Ω^* 有直和分解

$$\Omega^* = \bigoplus_{q=0}^{n} \Omega^q,$$

其中

$$\Omega^q = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leq n\}.$$

定义张量积:

$$\Omega^*(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n) \bigotimes_{\mathbb{R}} \Omega^*;$$
$$\Omega^q(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n) \bigotimes_{\mathbb{R}} \Omega^q.$$

相应于 Ω^* 的直和分解，我们有直和分解

$$\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{q=0}^{n} \Omega^q(\mathbb{R}^n).$$

$\Omega^*(\mathbb{R}^n)$ 的元称为 $\mathbb{R}^n$ 上光滑微分形式，$\Omega^q(\mathbb{R}^n)$ 的元称为光滑 q—形式.

这样，可把 $\omega \in \Omega^*(\mathbb{R}^n)$ 按型分解为

$$\omega = \sum_{q=0}^{n} \omega_q, \quad \omega_q \in \Omega^q(\mathbb{R}^n),$$

其中 ω_q 是 $\mathbb{R}^n$ 上 q—形式，它可唯一表示为

$$\omega_q = \sum_{i_1<\cdots<i_q} f_{i_1\cdots i_q} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q} = \sum_{I:i_1<\cdots<i_q} f_I dx_I.$$

例. 设 ω 为 $\mathbb{R}^n$ 上一个光滑 2–形式,

$$\begin{aligned}\omega =& h_{12}(x)dx_1 \wedge dx_2 + h_{21}(x)dx_2 \wedge dx_1 \\ =& (h_{12}(x) - h_{21}(x))dx_1 \wedge dx_2.\end{aligned}$$

所以 $f_{12}(x) = h_{12}(x) - h_{21}(x)$, 而对其余的 $i < j$, $f_{ij}(x) = 0$. $\square$

定义. 设

$$\tau = \sum_{I: i_1 < \cdots < i_p} f_I dx_I \in \Omega^p(\mathbb{R}^n), \quad \omega = \sum_{J: j_1 < \cdots < j_q} g_J dx_J \in \Omega^q(\mathbb{R}^n).$$

定义 τ 与 ω 的外积 $\tau \wedge \omega \in \Omega^{p+q}(\mathbb{R}^n)$ 为

$$\tau \wedge \omega = \sum_{I,J} f_I g_J dx_I \wedge dx_J = \sum_{K: k_1 < \cdots < k_{p+q}} h_K dx_K. \qquad \square$$

补充练习 1. 用 f_I 与 g_J 表示 h_K. $\square$

补充练习 2. 证明 $\tau \wedge \omega = (-1)^{pq} \omega \wedge \tau$. $\square$

定义. 外微分算子

$$d : \Omega^q(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{q+1}(\mathbb{R}^n)$$

定义如下.

(a) 若 $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

(b) 若 $\omega = \sum_I f_I dx_I$, 则

$$d\omega = \sum_I df_I \wedge dx_I = \sum_{i,I} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I. \qquad \square$$

命题 1.3. 若 $\tau \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$, 则

$$d(\tau \wedge \omega) = d\tau \wedge \omega + (-1)^p \tau \wedge d\omega. \qquad \square$$

命题 1.4. $d^2 = 0$. $\square$

补充练习 3. 证明上述两个命题. $\square$

由于 $d^2 = 0$, $\{\Omega^*(\mathbb{R}^n), d\}$ 形成一个复形:

$$\Omega^0(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{q-1}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Omega^q(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Omega^{q+1}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(\mathbb{R}^n).$$

它称为 $\mathbb{R}^n$ 上 de Rham 复形. 如有必要, 对 $q < 0$ 或 $q > n$ 添加 $\Omega^q(\mathbb{R}^n) = 0$.

定义

$$Z^q(\mathbb{R}^n) = \{\omega \in \Omega^q(\mathbb{R}^n) \mid d\omega = 0\},$$

其元称为闭的 (closed) q–形式. 定义

$$B^q(\mathbb{R}^n) = \{d\tau \mid \tau \in \Omega^{q-1}(\mathbb{R}^n)\},$$

其元称为恰当的 (exact) q–形式. 特别地,

$$Z^n(\mathbb{R}^n) = \Omega^n(\mathbb{R}^n), \quad B^0(\mathbb{R}^n) = 0.$$

因为 $d^2 = 0$, 所以

$$B^q(\mathbb{R}^n) \subset Z^q(\mathbb{R}^n).$$

定义. $\mathbb{R}^n$ 的第 q 个 de Rham 上同调是向量空间

$$H^q_{dR}(\mathbb{R}^n) = \frac{Z^q(\mathbb{R}^n)}{B^q(\mathbb{R}^n)}. \qquad \square$$

在不致于引起歧义时, 通常隐去下标 dR 而记作 $H^q(\mathbb{R}^n)$.

闭 q–形式 ω 的上同调类记为 $[\omega]$. 从

$$[\omega_1] = [\omega_2] \in H^q(\mathbb{R}^n)$$

可读出

$$\begin{aligned} &d\omega_1 = d\omega_2 = 0, \quad \text{且} \\ &\omega_1 - \omega_2 = d\tau \quad \text{对某个 } \tau \in \Omega^{q-1}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

The complex $\Omega^*(\mathbb{R}^n)$ together with the differential operator d is called the *de Rham complex* on $\mathbb{R}^n$. The kernel of d are the *closed* forms and the image of d, the *exact* forms. The de Rham complex may be viewed as a God-given set of differential equations, whose solutions are the closed forms. For instance, finding a closed 1-form $f dx + g dy$ on $\mathbb{R}^2$ is tantamount to solving the differential equation $\partial g/\partial x - \partial f/\partial y = 0$. By Proposition 1.4 the exact forms are automatically closed; these are the trivial or "uninteresting" solutions. A measure of the size of the space of "interesting" solutions is the definition of the de Rham cohomology.

同理, 对 $\mathbb{R}^n$ 的开集 U 可定义

$$\Omega^*(U) = C^\infty(U) \bigotimes_{\mathbb{R}} \Omega^* = \bigoplus_{q=0}^{n} \Omega^q(U),$$

$$\wedge, \ d,$$

$$Z^q(U) = \{\omega \in \Omega^q(U) \mid d\omega = 0\},$$

$$B^q(U) = \{\omega = d\tau \mid \tau \in \Omega^{q-1}(U)\},$$

$$H^q_{dR}(U) = \frac{Z^q(U)}{B^q(U)}.$$

例 1.5. $H^q(\mathbb{R}^n)$.

(a) $n=0$. 因为 $\Omega^0(\mathbb{R}^0)=\mathbb{R}$, 且对 $q\neq 0$, $\Omega^q(\mathbb{R}^0)=0$, 所以

$$H^q(\mathbb{R}^0)=\begin{cases}\mathbb{R} & q=0,\\ 0 & q\neq 0.\end{cases}$$

(b) $n=1$. 首先, 因为 $Z^0(\mathbb{R}^1)=\{\mathbb{R}^1\text{ 上常值函数}\}\simeq\mathbb{R}$, $B^0(\mathbb{R}^1)=0$, 所以

$$H^0(\mathbb{R}^1)=\mathbb{R}.$$

其次, 对任意的 $\omega=g(x)dx$, 令

$$f(x)=\int_0^x g(t)dt.$$

则 $df(x)=g(x)dx$. 因此 $B^1(\mathbb{R}^1)=\Omega^1(\mathbb{R}^1)$. 考虑到 $Z^1(\mathbb{R}^1)=\Omega^1(\mathbb{R}^1)$, 我们有

$$H^1(\mathbb{R}^1)=0.$$

(c) 设 U 是 $\mathbb{R}^1$ 上 m 个互不相交的开区间的并. 则

$$H^q(U) = \begin{cases} \mathbb{R}^m & q = 0 \\ 0 & q > 0. \end{cases}$$

(d) 一般地有以下的 Poincaré 引理.

$$H^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = 0 \\ 0 & q \neq 0. \end{cases}$$

它的证明会在以后给出. $\square$

练习 1.7. 设 P, Q 是 $\mathbb{R}^2$ 中两点. 计算 $H^*(\mathbb{R}^2 - P - Q)$ 并求表示上同调类的闭形式. $\square$

紧上同调

设 X 是拓扑空间，$f \in C^0(X)$. 定义 f 的支撑集 (support，以下简称支集) 为闭集

$$\mathrm{Supp}\, f = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

X 上有紧支集的连续函数的全体记为

$$C_c^0(X) = \{f \in C^0(X) \mid \mathrm{Supp}\, f \text{ 是紧集}\}.$$

如果 M 是光滑流形，则 M 上有紧支集的光滑函数的全体记为

$$C_c^\infty(M) = C_c^0(M) \cap C^\infty(M).$$

记

$$\Omega_c^*(\mathbb{R}^n) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \bigotimes_{\mathbb{R}} \Omega^*,$$

它是 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的光滑形式的全体. 可将它按型分解为

$$\Omega_c^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{q=0}^{n} \Omega_c^q(\mathbb{R}^n),$$

其中 $\Omega_c^q(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的光滑 q–形式的全体.

设 $\omega \in \Omega_c^q(\mathbb{R}^n)$. 它可表示为

$$\omega = \sum_{I: i_1 < \cdots < i_q} f_I dx_I, \quad \text{其中 } f_I \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

因为 $\mathrm{Supp}\,\frac{\partial f_I}{\partial x_i} \subset \mathrm{Supp} f_I$, 并且因为紧集的闭子集是紧集, 所以 $\frac{\partial f_I}{\partial x_i} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 于是 $d\omega \in \Omega_c^{q+1}(\mathbb{R}^n)$. 这就是说, $\{\Omega_c^*(\mathbb{R}^n), d\}$ 是一个复形, 称为 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的 de Rham 复形.

定义

$$
\begin{aligned}
Z_c^q(\mathbb{R}^n) &= \{\omega \in \Omega_c^q(\mathbb{R}^n) \mid d\omega = 0\}; \\
B_c^q(\mathbb{R}^n) &= \{d\tau \mid \tau \in \Omega_c^{q-1}(\mathbb{R}^n)\}; \\
H_c^q(\mathbb{R}^n) &= \frac{Z_c^q(\mathbb{R}^n)}{B_c^q(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

$H_c^q(\mathbb{R}^n)$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 的第 q 个具有紧支集的上同调，简称第 q 个紧上同调.

根据定义，

$$
Z_c^q(\mathbb{R}^n) = \Omega_c^q(\mathbb{R}^n) \cap Z^q(\mathbb{R}^n);
$$

但是等式

$$
B_c^q(\mathbb{R}^n) = B^q(\mathbb{R}^n) \cap \Omega_c^q(\mathbb{R}^n)
$$

一般不成立.

例 1.6. $H_c^q(\mathbb{R}^n)$.

(a) $n = 0$.

$$H_c^q(\mathbb{R}^0) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = 0 \\ 0 & q \neq 0. \end{cases}$$

(b) $n = 1$.

$$H_c^q(\mathbb{R}^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = 1 \\ 0 & q \neq 1. \end{cases}$$

证. 因为 $Z_c^0(\mathbb{R}^1) = 0$, 所以 $H_c^0(\mathbb{R}^1) = 0$.

为了计算 $H_c^1(\mathbb{R}^1)$, 考虑映射

$$\int_{\mathbb{R}^1} : \Omega_c^1(\mathbb{R}^1) \to \mathbb{R}.$$

显然这个映射是满射, 因为总存在 $f(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^1)$ 使得 $\int_{\mathbb{R}^1} f(x)dx = 1$.

要证 $\ker \int_{\mathbb{R}^1} = B_c^1(\mathbb{R}^1)$. 先证 $B_c^1(\mathbb{R}^1) \subset \ker \int_{\mathbb{R}^1}$. 若 $df \in B_c^1(\mathbb{R}^1)$, 则 $\mathrm{Supp}\, f$ 是紧的, 设它包含于 $[a,b]$. 所以

$$\int_{\mathbb{R}^1} df = \int_{\mathbb{R}^1} f'(x)dx = f(b) - f(a) = 0,$$

即 $df \in \ker \int_{\mathbb{R}^1}$.

再证 $\ker \int_{\mathbb{R}^1} \subset B_c^1(\mathbb{R}^1)$. 设 $g(x)dx \in \Omega_c^1(\mathbb{R}^1)$ 且 $\int_{\mathbb{R}^1} g(x)dx = 0$. 令

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt.$$

则 $f(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^1)$ 且 $df(x) = g(x)dx$.

综上所述, 有正合序列

$$0 \longrightarrow \Omega_c^0(\mathbb{R}^1) \xrightarrow{d} \Omega_c^1(\mathbb{R}^1) \xrightarrow{\int_{\mathbb{R}^1}} \mathbb{R} \longrightarrow 0.$$

于是

$$H_c^1(\mathbb{R}^1) = \frac{Z_c^1(\mathbb{R}^1)}{B_c^1(\mathbb{R}^1)} = \frac{\Omega_c^1(\mathbb{R}^1)}{\ker \int_{\mathbb{R}^1}} \simeq \mathbb{R}. \qquad \Box$$

(c) 对一般的 n, 有以下关于紧上同调的 Poincaré 引理.

$$H_c^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = n \\ 0 & q \neq n. \end{cases}$$

它的证明会在以后给出. $\square$

$\mathbb{R}^n$ 是可缩空间, 即它与一点同伦等价. 上例表明紧上同调不是同伦不变量.

对 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 U, 可同样定义它的紧上同调 $H_c^*(U)$.

微分复形

向量空间的直和 $C = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} C^q$ 称为微分复形若存在同态 $d : C \to C$ 使得

$$d : C^q \to C^{q+1}, \quad d^2 = 0.$$

复形 $\{C, d\}$ 的上同调是向量空间的直和

$$H(C) = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} H^q(C),$$

其中 $H^q(C)$ 是第 q 个上同调:

$$H^q(C) = \frac{\ker d \cap C^q}{\operatorname{im} d \cap C^q}.$$

定义. 设 $\{A, d_A\}$, $\{B, d_B\}$ 是复形. 若对每个 $q \in \mathbb{Z}$, 存在同态 $f_q : A^q \to B^q$ 使得

$$f_{q+1} \circ d_A = d_B \circ f_q,$$

即图表

$$\begin{tikzcd} A^q \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "f_q"'] & A^{q+1} \arrow[d, "f_{q+1}"] \\ B^q \arrow[r, "d_B"'] & B_{q+1} \end{tikzcd}$$

可交换, 则称两个复形之间的映射 $f : A \to B$ 是链映射. $\square$

若 $f : A \to B$ 是链映射, 则存在诱导同态

$$f_q^* : H^q(A) \to H^q(B), \quad f_q^*([a]) = [f_q(a)].$$

定义. 设 $\{A, d_A\}$, $\{B, d_B\}$, $\{C, d_C\}$ 是复形, $f: A \to B$, $g: B \to C$ 是链映射, 且对每个 $q \in \mathbb{Z}$, 序列

$$0 \longrightarrow A_q \xrightarrow{f_q} B_q \xrightarrow{g_q} C_q \longrightarrow 0$$

是正合的. 则称序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

是复形的短正合序列. $\square$

给定复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

存在上同调的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H^q(A) \xrightarrow{f_q^*} H^q(B) \xrightarrow{g_q^*} H^q(C) \xrightarrow{d^*} H^{q+1}(A) \longrightarrow \cdots$$

回忆连接同态 $d^*: H^q(C) \to H^{q+1}(A)$ 的定义. 用图追踪

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^{q+2} \arrow[r, "f_{q+2}"] & B^{q+2} \arrow[r, "g_{q+2}"] & C^{q+2} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{q+1} \arrow[r, "f_{q+1}", "(3)"'] \arrow[u, "d"'] & B^{q+1} \arrow[r, "g_{q+1}"] \arrow[u, "d"'] & C^{q+1} \arrow[r] \arrow[u, "d"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^q \arrow[r, "f_q"] \arrow[u, "d"'] & B^q \arrow[r, "g_q", "(1)"'] \arrow[u, "d", "(2)"'] & C^q \arrow[r] \arrow[u, "d"'] & 0
\end{tikzcd}$$

设 $[c] \in H^q(C)$, 即 $c \in C^q$, $dc = 0$. 因为 g_q 是满射, 所以存在 $b \in B^q$ 使得 $g_q(b) = c$. 因为 $g_{q+1}(db) = dg_q(b) = dc = 0$ 且 $\operatorname{im} f_{q+1} = \ker g_{q+1}$, 所以存在 $a \in A^{q+1}$ 使得 $f_{q+1}(a) = db$. 又因为 $f_{q+2}(da) = df_{q+1}(a) = d^2b = 0$ 且 f_{q+2} 是单射, 所以 $da = 0$, $[a] \in H^{q+1}(A)$. 定义

$$d^*([c]) = [a].$$

补充练习 4. 证明 d^* 是定义好的, 即与上述的 c, b, a 的选取无关. □

作业:

1. 补充练习 1.
2. 补充练习 2.
3. 补充练习 3.
4. 练习 1.7.
5. 补充练习 4.
6. Consider the differential 1-form $\omega = xdy - ydx + dz$ in $\mathbb{R}^3$ with coordinates (x, y, z). Prove that $f\omega$ is not closed for any nowhere zero function $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. （2018 年丘赛团体第 3 题）
7. Let $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ be a basis of a vector space V. Denote by $\{\omega_i\}_{i=1,\dots,n}$ the dual basis of $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$. Show that the set

$$\{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n\}$$

is a basis of $\Lambda^r V^*$, where r is a positive integer and $r \leq n$. （2017 年丘赛团体赛第 4 题）