泛函分析讲稿

二〇一六年一月八日

目录

第一章　度量空间

1.1　度量空间

度量空间是现代数学最重要概念之一. 1906年，它由法国数学家M.Fréchet引进.

1.1.1　定义

定义 1.1.1 (度量空间) *设X是一个非空的集合. 如果对于X中的任意两个元素x, y都有一个实数$\rho(x, y)$与它们对应, 而且满足下面的条件:*

1. *$\rho(x, y) \geqslant 0$, 并且$\rho(x, y) = 0$ 的充要条件是$x = y$*
2. *对称性: $\rho(x, y) = \rho(y, x), \qquad \forall x, y \in X$*
3. *三角不等式*
$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y), \qquad \forall x, y, z \in X \tag{1.1}$$

则(X, ρ)称为度量空间, ρ为X上的度量, $\rho(x, y)$为点x, y之间的距离.

例 1.1.2 *在$\mathbb{R}$直线上, 定义距离:*

$$\rho_1(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

例 1.1.3 *在n个实数有序组$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$全体组成的集合$X$中, 定义*

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \tag{1.2}$$

则(X, ρ)是度量空间, 称为n维Euclid空间, 通常记为$\mathbb{R}^n$.

证明：　我们只要验证度量(1.2)满足三角不等式.

设$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, 三角不等式$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$可写成

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2} \tag{1.3}$$

令$a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则$x_i - z_i = a_i + b_i$, 上面不等式可以改写成：

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \tag{1.4}$$

由Cauchy-Schwarz不等式：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \tag{1.5}$$

我们可以得到：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\
&\leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2
\end{aligned} \tag{1.6}$$

从而证明了不等式(1.4), 因而也就证明了不等式(1.3). QED.

例 1.1.4 *考虑同样的n个实数有序组组成的集合X, 但其中的距离由下式*

$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \tag{1.7}$$

定义, $\mathbb{R}_1^n = (X, \rho_1)$也是度量空间.

例 1.1.5 *再取n个实数有序组组成的集合X, 而其元素之间的距离由公式*

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| \tag{1.8}$$

给出, $\mathbb{R}_\infty^n = (X, \rho_\infty)$是度量空间.

上面例子表明在同一个集合中, 可以引进不同的度量, 得到不同的度量空间.

例 1.1.6 *在闭区间$[a,b]$上的一切连续实(或复)函数的集$C[a,b]$中，定义*

$$\rho(f,g)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)-g(t)| \tag{1.9}$$

它是$C[a,b]$中的距离. 此空间在分析学中起着极为重要的作用. 我们也用此空间点集的同样记号$C[a,b]$来记它.

例 1.1.7 *同样, 考察闭区间$[a,b]$上的一切连续函数的集, 而距离按下面的公式定义:*

$$\rho(f,g)=\left(\int_a^b|f(t)-g(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.10}$$

记这个度量空间为$C_2[a,b]$, 并称它为具有平方度量的连续函数空间.

三角形不等式可从Cauchy-Schwarz积分不等式

$$\left(\int_a^b|f(t)g(t)|\,dt\right)^2\leqslant\int_a^b|f(t)|^2\,dt\cdot\int_a^b|g(t)|^2\,dt \tag{1.11}$$

推得.

例 1.1.8 *平方可和的实(或复)数列全体$l^2=\left\{x\colon x=(x_1,x_2,\cdots),\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty\right\}$, 定义度量:*

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^2} \tag{1.12}$$

这是度量空间.

从不等式$|a-b|^2\leqslant 2(|a|^2+|b|^2)$推得, 对一切$x,y\in l^2$, 由(1.12)定义的$\rho(x,y)$都有意义. 现在我们来证明三角形不等式. 设$x,y,z\in l^2$, 我们已经知道对于一切$n$都有:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}&\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2}\\&\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(y_i-z_i)^2}\\&=\rho(x,y)+\rho(y,z)\end{aligned} \tag{1.13}$$

令$n\to\infty$, 得到:

$$\rho(x,z)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z) \tag{1.14}$$

三角形不等式成立.

例 1.1.9 *一切有界实数序列$x=(x_1,x_2,\cdots)$的集X. 令*

$$\rho(x,y)=\sup_{1\leqslant n<\infty}|x_n-y_n| \tag{1.15}$$

$l^\infty=(X,\rho)$是度量空间

例 1.1.10 *在n个实数有序组构成的集X中, 定义:*

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.16}$$

其中$p\geqslant 1$是任意固定的数. (X,ρ_p)是度量空间, 记为$\mathbb{R}_p^n$

同样, 我们只要验证三角不等式.

设$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n),y=(y_1,y_2,\ldots,y_n),z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)\in X$, 令$a_i=x_i-y_i,b_i=y_i-z_i(i=1,2,\cdots)$, 这时, 三角不等式就化成:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.17}$$

这就是Minkowski不等式. 当$p=1$时Minkowski不等式显然成立. 当$p>1$时, 它可以由下面的Hölder 不等式推出.

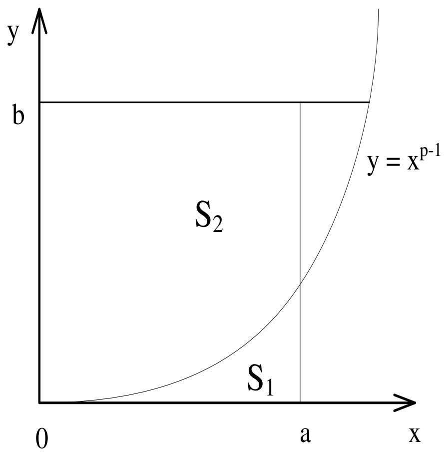
$$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.18}$$

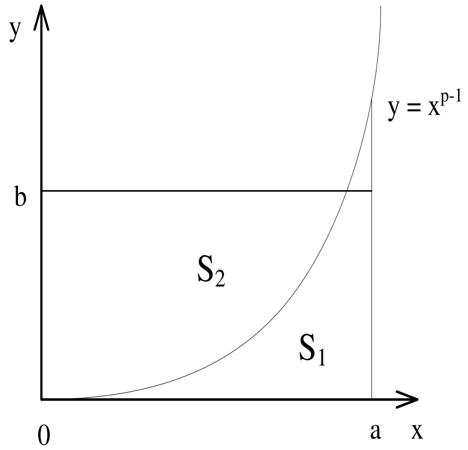
其中数$p,q>1$, 并且满足: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

为了证明Hölder不等式, 首先我们应该注意到不等式(1.18)是齐次的. 这意味着, 如果对于向量$a=(a_1,a_2,\ldots,a_n),b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$不等式(1.18)成立, 那么它对于向量$\lambda a$与$\mu b$(其中$\lambda$与$\mu$是任意数)也成立. 因此, 只要证明不等式(1.18)在

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p=\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q=1 \tag{1.19}$$

的条件下成立就可以了.





考虑方程$y = x^{p-1}(x \geqslant 0)$（它的反函数$x = y^{q-1}$）所确定的平面曲线．由图中可以看出，对于任意选取的正数a与b都有$S_1 + S_2 \geqslant ab$，其中S_1是$x-$轴和曲线$y = x^{p-1}$以及直线$x = a$围成图形的面积，S_2是$y-$轴和曲线$x = y^{q-1}$以及直线$y = b$围成图形的面积．

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1}dx = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^b y^{q-1}dy = \frac{b^q}{q}$$

于是，得到不等式

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

所以

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^p}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{|b_i|^q}{q} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

当$p = 2$时，Hölder不等式(1.18)就是Cauchy-Schwarz不等式．

现在，我们证明Minkowski不等式．

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p &= \sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|\,|a_i+b_i|^{p-1}\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)\,|a_i+b_i|^{p-1}\\ &= \sum_{i=1}^{n}|a_i|\,|a_i+b_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|b_i|\,|a_i+b_i|^{p-1}\\ &\leqslant \left\{\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{1.20}$$

由$(p-1)q=p$得到：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.21}$$

从而三角形不等式成立.

从不等式：$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$也不难推出Hölder积分不等式

$$\int_a^b|f(t)g(t)|\,dt\leqslant\left(\int_a^b|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.22}$$

对于$[a,b]$区间上的可测函数$f(t)$与$g(t)$, 如果$|f|^p,|g|^q\in L[a,b]$, 此不等式是正确的. 由此同样也可得到Minkowski积分不等式

$$\left(\int_a^b|f(t)+g(t)|^p\;dt\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_a^b|f(t)|^p\;dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b|g(t)|^p\;dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.23}$$

例 1.1.11 *p方可和的实（复）数列全体$l^p=\{x\colon x=(x_1,x_2\cdots),\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\}$, 定义度量:*

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.24}$$

这是度量空间.

由不等式$|a+b|^p\leqslant(2\max\{|a|,|b|\})^p\leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p)$, 得到对于任意的$x,y\in l^p$由(1.24)定义的$\rho(x,y)$都有意义.

根据Minkowski不等式：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.25}$$

令$n \to \infty$得到:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.26}$$

所以, 在l^p三角不等式成立.

例 1.1.12 *考察闭区间$[a,b]$上的一切连续函数的集, 定义距离*

$$\rho(f,g) = \left(\int_a^b |f(t)-g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.27}$$

这是一个度量空间, 记为$C_p[a,b]$.

例 1.1.13 (平凡的例子) *设X是一个非空的集合, 定义如下的距离:*

$$\rho_0(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

1.1.2 子空间

设(X,ρ)是度量空间, A是X的非空子集. 如果对于A中的任意两点$x,y \in A$, 规定

$$\rho_A(x,y) = \rho(x,y) \tag{1.28}$$

则(A,ρ_A)是度量空间, 称为X的子空间.

用这种方法可以给出无穷多的例子.

1.1.3 积空间

设$(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2)$是两个度量空间, 集合:

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1,x_2)\colon x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$$

是X_1,X_2的乘积空间. 在X中, 我们可以定义以下的度量:

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\sqrt{\rho_1(x_1,y_1)^2+\rho_2(x_2,y_2)^2} \tag{1.29}$$

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2) \tag{1.30}$$

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\max\{\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2)\} \tag{1.31}$$

1.1.4 极限

定义 1.1.14 (极限) *设(X,ρ)是度量空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中点列, $x_0\in X$, 称点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按照度量ρ收敛于x_0, 如果:*

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0 \tag{1.32}$$

记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$

在上面的例子中, 各个度量空间中的点列按照度量收敛分别相当于:

度量空间	度量	点列按照度量收敛$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0$
R^1	$\rho(x,y)=\lvert x-y\rvert$	$\Leftrightarrow$通常的数列收敛
R^n	$\rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$	$\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_k^{(i)}=x_0^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$
R_1^n	$\rho_1(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lvert x_i-y_i\rvert$	$\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_k^{(i)}=x_0^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$
R_∞^n	$\rho_\infty(x,y)=\max\limits_{1\le i\le n}\lvert x_i-y_i\rvert$	$\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_k^{(i)}=x_0^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$
R_p^n	$\rho_p(x,y)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lvert x_i-y_i\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$	$\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_k^{(i)}=x_0^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$
l^p	$\rho_p(x,y)=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert x_n-y_n\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$	$\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_k^{(n)}=x_0^{(n)}(n=1,2,\cdots)$
l^∞	$\rho_\infty(x,y)=\sup\limits_{1\le n<\infty}\lvert x_n-y_n\rvert$	$\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_k^{(n)}=x_0^{(n)}(n=1,2,\cdots)$
$C[a,b]$	$\rho(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}\lvert x(t)-y(t)\rvert$	$\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_k(t)=x_0(t)$一致收敛
$C_p[a,b]$	$\rho(x,y)=\left(\int_a^b\lvert x(t)-y(t)\rvert^p\ dt\right)^{\frac{1}{p}}$	$\Leftrightarrow$ 函数列 $\{x_k\}$ $p-$方收敛于x_0
平凡空间X	$\rho(x,y)=\delta_{xy}$	$\Leftrightarrow$ 存在N, $x_n=x_0$ (当$n\geqslant N$时)

注意: 在l^2,l^p,l^∞中, 点列收敛并不等同于点点收敛. 但是我们可以在数列的全体$\mathbb{R}^\infty$(或者$\mathbb{C}^\infty$)中给出一个度量, 使得其中的点列按照度量收敛等价于点点收敛.

例 1.1.15 *在$\mathbb{R}^\infty$中定义距离如下:*

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|},\quad x=\{x_n\},y=\{y_n\}\in\mathbb{R}^\infty \tag{1.33}$$

则$(\mathbb{R}^\infty,\rho)$是度量空间, 并且$\mathbb{R}^\infty$中的点列$\{x^{(k)}\}$收敛于$\{x^{(0)}\}$等价于$\lim\limits_{k\to\infty}x_n^{(k)}=x_n^{(0)}$ $(n=1,2,\cdots)$.

设(X,ρ)是度量空间, 我们还可以在X上定义新的度量:

$$\rho'(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)},\quad \forall x,y\in X$$

以及度量:

$$\rho''(x,y)=\log(1+\rho(x,y)),\quad \forall x,y\in X$$

它们是不同的度量. 但是容易验证, 对于空间X中的点列$\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0(\rho)\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0(\rho')\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0(\rho'')$.

习题

1. 设$\{x^{(m)}\}$是度量空间l^2中的点列, $x^{(0)}\in l^2$, 证明: 如果$\lim\limits_{m\to\infty}\rho(x^{(m)},x^{(0)})=0$, 那么对于任何$n$, $\lim\limits_{m\to\infty}\left|x_n^{(m)}-x_n^{(0)}\right|=0$, 并举例说明逆命题不正确.
2. 设(X,ρ)是度量空间, 证明: 上面引进的ρ'和ρ''也是X上的度量, 并且其中点列收敛是一致的.
3. 证明对于例1.1.15中的度量空间(R^∞,ρ), 点列按照度量收敛等价于各个分量都收敛.
4. 在三维Euclid空间$\mathbb{R}^3$中, 考虑单位球面
$$S^2=\{x\colon x=(x_1,x_2,x_3),x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$$
对于$x,y\in S^2$, 规定$d(x,y)$为过x,y两点的大圆上以x,y为端点的劣弧的弧长. 证明$d(x,y)$是x,y间的距离, 它不是Euclid距离. 如果用$\rho(x,y)$表示Euclid距离, 那末
$$\rho(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant\tfrac{\pi}{2}\rho(x,y)$$
5. X是$[0,1]$上多项式全体. 当$P,Q\in X$, 记$P-Q=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$, 在$X$上分别作
$$\rho_1(P,Q)=\max_{x\in[0,1]}|P(x)-Q(x)|$$
$$\rho_2(P,Q)=\sum_{i=0}^{n}|a_i|$$