

泛函分析讲稿

二〇一六年一月八日

目录

第一章 度量空间	1
1.1 度量空间	1
1.1.1 定义	1
1.1.2 子空间	7
1.1.3 积空间	7
1.1.4 极限	8
1.2 赋范线性空间、内积空间	10
1.2.1 线性空间	10
1.2.2 赋范线性空间	12
1.2.3 内积空间	13
1.3 度量空间中的点集	16
1.3.1 内点、开集	16
1.3.2 极限点、闭集	20
1.3.3 点集间的距离	22
1.3.4 连续映照	22
1.3.5 连续曲线	24
1.4 完备性	26
1.4.1 完备性的概念	26
1.4.2 闭球套定理	30
1.4.3 Baire定理	31
1.4.4 Hilbert空间的投影定理	32
1.5 不动点定理	37
1.5.1 压缩映照原理	37
1.5.2 应用	41
1.6 Hilbert空间的正交系	45

1.6.1	标准正交系	45
1.6.2	正交系的完备性	48
1.6.3	线性无关向量系的正交化	51
1.6.4	可分Hilbert空间的模型	52
1.7	稠密性	54
1.7.1	稠密性	54
1.7.2	可分空间	55
1.8	紧性	57
1.8.1	相对列紧集	57
1.8.2	完全有界集	58
1.8.3	Arzelà-Ascoli定理	62
1.8.4	列紧集	65
1.8.5	紧集上的连续映照	67
1.9	习题	70
第二章	线性泛函, Hahn-Banach定理	73
2.1	线性泛函	73
2.1.1	定义	73
2.1.2	线性泛函的几何意义	74
2.2	Hahn-Banach定理	75
2.2.1	Hahn-Banach定理	75
2.2.2	凸集	79
2.2.3	半范数, Minkowski泛函	79
2.2.4	线性泛函的连续性和有界性	81
2.2.5	赋范空间中的Hahn-Banach定理	85
2.2.6	凸集的分离子	88
2.3	共轭空间及其表示	90
2.3.1	共轭空间	90
2.3.2	共轭空间的表示	91
2.3.3	F.Riesz表示定理	98
2.3.4	Hilbert空间上连续线性泛函的表示及其共轭空间	99

第三章 基本定理	103
3.1 赋范线性空间	103
3.1.1 有限维的赋范线性空间	103
3.1.2 Riesz引理	105
3.2 有界线性算子	107
3.2.1 线性算子概念	107
3.2.2 线性算子的有界性与连续性	108
3.2.3 有界线性算子全体所成的空间	112
3.3 开映照定理、闭图像定理和共鸣定理	114
3.3.1 开映照定理	114
3.3.2 闭图象定理	117
3.3.3 共鸣定理	119
3.4 共轭空间和共轭算子	123
3.4.1 二次共轭空间	123
3.4.2 共轭算子	124
3.4.3 Hilbert空间中的共轭算子	126
3.5 习题	130
第四章 紧算子的谱理论	133
4.1 紧算子	133
4.2 有界线性算子的正则集与谱	140
4.2.1 特征值与特征向量	140
4.2.2 算子的正则点与谱点	142
4.2.3 不变子空间	146
4.3 紧算子的谱	147

第一章 度量空间

1.1 度量空间

度量空间是现代数学最重要概念之一. 1906年, 它由法国数学家M.Fréchet引进.

1.1.1 定义

定义 1.1.1 (度量空间) 设 X 是一个非空的集合. 如果对于 X 中的任意两个元素 x, y 都有一个实数 $\rho(x, y)$ 与它们对应, 而且满足下面的条件:

1. $\rho(x, y) \geq 0$, 并且 $\rho(x, y) = 0$ 的充要条件是 $x = y$
2. 对称性: $\rho(x, y) = \rho(y, x), \quad \forall x, y \in X$
3. 三角不等式

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \quad \forall x, y, z \in X \quad (1.1)$$

则 (X, ρ) 称为度量空间, ρ 为 X 上的度量, $\rho(x, y)$ 为点 x, y 之间的距离.

例 1.1.2 在 $\mathbb{R}$ 直线上, 定义距离:

$$\rho_1(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

例 1.1.3 在 n 个实数有序组 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 全体组成的集合 X 中, 定义

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (1.2)$$

则 (X, ρ) 是度量空间, 称为 n 维Euclid空间, 通常记为 $\mathbb{R}^n$.

证明: 我们只要验证度量(1.2)满足三角不等式.

设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n), z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, 三角不等式 $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ 可写成

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} \quad (1.3)$$

令 $a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $x_i - z_i = a_i + b_i$, 上面不等式可以改写成:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \quad (1.4)$$

由Cauchy-Schwarz不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \quad (1.5)$$

我们可以得到:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &\leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

从而证明了不等式(1.4), 因而也就证明了不等式(1.3).

QED.

例 1.1.4 考虑同样的 n 个实数有序数组成的集合 X , 但其中的距离由下式

$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (1.7)$$

定义, $\mathbb{R}_1^n = (X, \rho_1)$ 也是度量空间.

例 1.1.5 再取 n 个实数有序数组成的集合 X , 而其元素之间的距离由公式

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \quad (1.8)$$

给出, $\mathbb{R}_\infty^n = (X, \rho_\infty)$ 是度量空间.

上面例子表明在同一个集合中, 可以引进不同的度量, 得到不同的度量空间.

例 1.1.6 在闭区间 $[a, b]$ 上的一切连续实（或复）函数的集 $C[a, b]$ 中，定义

$$\rho(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)| \quad (1.9)$$

它是 $C[a, b]$ 中的距离。此空间在分析学中起着极为重要的作用。我们也用此空间点集的同样记号 $C[a, b]$ 来记它。

例 1.1.7 同样，考察闭区间 $[a, b]$ 上的一切连续函数的集，而距离按下面的公式定义：

$$\rho(f, g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.10)$$

记这个度量空间为 $C_2[a, b]$ ，并称它为具有平方度量的连续函数空间。

三角形不等式可从Cauchy-Schwarz积分不等式

$$\left(\int_a^b |f(t)g(t)| dt \right)^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |g(t)|^2 dt \quad (1.11)$$

推得。

例 1.1.8 平方可和的实（或复）数列全体 $l^2 = \left\{ x: x = (x_1, x_2, \dots), \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ ，定义度量：

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2} \quad (1.12)$$

这是度量空间。

从不等式 $|a - b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$ 推得，对一切 $x, y \in l^2$ ，由(1.12)定义的 $\rho(x, y)$ 都有意义。现在我们来证明三角形不等式。设 $x, y, z \in l^2$ ，我们已经知道对于一切 n 都有：

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (y_i - z_i)^2} \\ &= \rho(x, y) + \rho(y, z) \end{aligned} \quad (1.13)$$

令 $n \rightarrow \infty$ ，得到：

$$\rho(x, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad (1.14)$$

三角形不等式成立.

例 1.1.9 一切有界实数序列 $x = (x_1, x_2, \dots)$ 的集 X . 令

$$\rho(x, y) = \sup_{1 \leq n < \infty} |x_n - y_n| \quad (1.15)$$

$l^\infty = (X, \rho)$ 是度量空间

例 1.1.10 在 n 个实数有序组构成的集 X 中, 定义:

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.16)$$

其中 $p \geq 1$ 是任意固定的数. (X, ρ_p) 是度量空间, 记为 $\mathbb{R}_p^n$

同样, 我们只要验证三角不等式.

设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n), z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in X$, 令 $a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i (i = 1, 2, \dots)$, 这时, 三角不等式就化成:

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.17)$$

这就是 Minkowski 不等式. 当 $p = 1$ 时 Minkowski 不等式显然成立. 当 $p > 1$ 时, 它可以由下面的 Hölder 不等式推出.

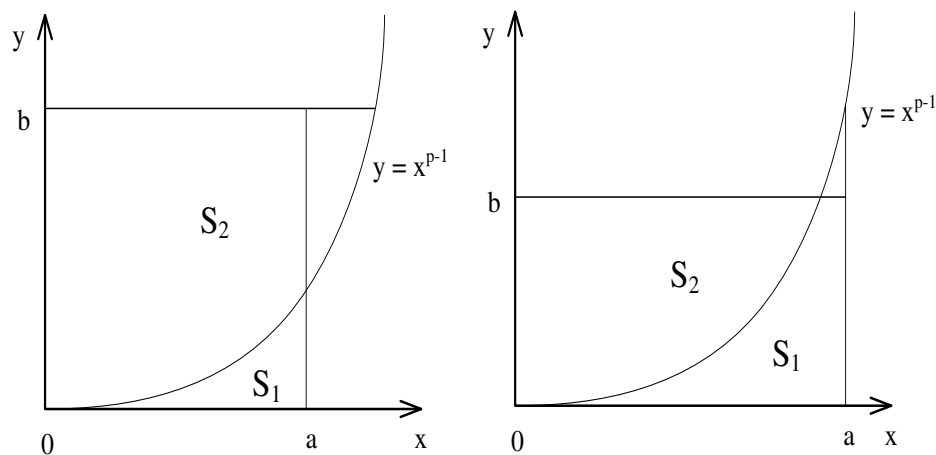
$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.18)$$

其中数 $p, q > 1$, 并且满足: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

为了证明 Hölder 不等式, 首先我们应该注意到不等式 (1.18) 是齐次的. 这意味着, 如果对于向量 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n), b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 不等式 (1.18) 成立, 那么它对于向量 λa 与 μb (其中 λ 与 μ 是任意数) 也成立. 因此, 只要证明不等式 (1.18) 在

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^p = \sum_{i=1}^n |b_i|^q = 1 \quad (1.19)$$

的条件下成立就可以了.



考虑方程 $y = x^{p-1} (x \geq 0)$ (它的反函数 $x = y^{q-1}$) 所确定的平面曲线. 由图中可以看出, 对于任意选取的正数 a 与 b 都有 $S_1 + S_2 \geq ab$, 其中 S_1 是 x -轴和曲线 $y = x^{p-1}$ 以及直线 $x = a$ 围成图形的面积, S_2 是 y -轴和曲线 $x = y^{q-1}$ 以及直线 $y = b$ 围成图形的面积.

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}$$

于是, 得到不等式

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

所以

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^p}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{|b_i|^q}{q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

当 $p = 2$ 时, Hölder 不等式 (1.18) 就是 Cauchy-Schwarz 不等式.

现在, 我们证明 Minkowski 不等式.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p &= \sum_{i=1}^n |a_i + b_i| |a_i + b_i|^{p-1} \\
&\leq \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|) |a_i + b_i|^{p-1} \\
&= \sum_{i=1}^n |a_i| |a_i + b_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |b_i| |a_i + b_i|^{p-1} \\
&\leq \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.20)
\end{aligned}$$

由 $(p-1)q = p$ 得到:

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.21)$$

从而三角形不等式成立.

从不等式: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ 也不难推出 Hölder 积分不等式

$$\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.22)$$

对于 $[a, b]$ 区间上的可测函数 $f(t)$ 与 $g(t)$, 如果 $|f|^p, |g|^q \in L[a, b]$, 此不等式是正确的. 由此同样也可得到 Minkowski 积分不等式

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.23)$$

例 1.1.11 p 方可和的实 (复) 数列全体 $l^p = \{x: x = (x_1, x_2, \dots), \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$, 定义度量:

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.24)$$

这是度量空间.

由不等式 $|a + b|^p \leq (2 \max\{|a|, |b|\})^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$, 得到对于任意的 $x, y \in l^p$ 由 (1.24) 定义的 $\rho(x, y)$ 都有意义.

根据 Minkowski 不等式:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得到:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.26}$$

所以, 在 l^p 三角不等式成立.

例 1.1.12 考察闭区间 $[a, b]$ 上的一切连续函数的集, 定义距离

$$\rho(f, g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.27}$$

这是一个度量空间, 记为 $C_p[a, b]$.

例 1.1.13 (平凡的例子) 设 X 是一个非空的集合, 定义如下的距离:

$$\rho_0(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

1.1.2 子空间

设 (X, ρ) 是度量空间, A 是 X 的非空子集. 如果对于 A 中的任意两点 $x, y \in A$, 规定

$$\rho_A(x, y) = \rho(x, y) \tag{1.28}$$

则 (A, ρ_A) 是度量空间, 称为 X 的子空间.

用这种方法可以给出无穷多的例子.

1.1.3 积空间

设 $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$ 是两个度量空间, 集合:

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2): x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$$

是 X_1, X_2 的乘积空间. 在 X 中, 我们可以定义以下的度量:

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{\rho_1(x_1, y_1)^2 + \rho_2(x_2, y_2)^2} \quad (1.29)$$

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2) \quad (1.30)$$

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max \{ \rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2) \} \quad (1.31)$$

1.1.4 极限

定义 1.1.14 (极限) 设 (X, ρ) 是度量空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中点列, $x_0 \in X$, 称点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按照度量 ρ 收敛于 x_0 , 如果:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0 \quad (1.32)$$

记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$

在上面的例子中, 各个度量空间中的点列按照度量收敛分别相当于:

度量空间	度量	点列按照度量收敛 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$
R^1	$\rho(x, y) = x - y $	$\Leftrightarrow$ 通常的数列收敛
R^n	$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$	$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(i)} = x_0^{(i)} (i = 1, 2, \dots, n)$
R_1^n	$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i - y_i $	$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(i)} = x_0^{(i)} (i = 1, 2, \dots, n)$
R_{∞}^n	$\rho_{\infty}(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i - y_i $	$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(i)} = x_0^{(i)} (i = 1, 2, \dots, n)$
R_p^n	$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i - y_i ^p \right)^{\frac{1}{p}}$	$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(i)} = x_0^{(i)} (i = 1, 2, \dots, n)$
l^p	$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n - y_n ^p \right)^{\frac{1}{p}}$	$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = x_0^{(n)} (n = 1, 2, \dots)$
l^{∞}	$\rho_{\infty}(x, y) = \sup_{1 \leq n < \infty} x_n - y_n $	$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = x_0^{(n)} (n = 1, 2, \dots)$
$C[a, b]$	$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} x(t) - y(t) $	$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = x_0(t)$ 一致收敛
$C_p[a, b]$	$\rho(x, y) = \left(\int_a^b x(t) - y(t) ^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$	$\Leftrightarrow$ 函数列 $\{x_k\}$ p -方收敛于 x_0
平凡空间 X	$\rho(x, y) = \delta_{xy}$	$\Leftrightarrow$ 存在 N , $x_n = x_0$ (当 $n \geq N$ 时)

注意: 在 l^2, l^p, l^{∞} 中, 点列收敛并不等同于点点收敛. 但是我们可以在数列的全体 $\mathbb{R}^{\infty}$ (或者 $\mathbb{C}^{\infty}$) 中给出一个度量, 使得其中的点列按照度量收敛等价于点点收敛.

例 1.1.15 在 $\mathbb{R}^\infty$ 中定义距离如下:

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}, \quad x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in \mathbb{R}^\infty \quad (1.33)$$

则 $(\mathbb{R}^\infty, \rho)$ 是度量空间, 并且 $\mathbb{R}^\infty$ 中的点列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛于 $\{x^{(0)}\}$ 等价于 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^{(k)} = x_n^{(0)}$ ($n = 1, 2, \dots$).

设 (X, ρ) 是度量空间, 我们还可以在 X 上定义新的度量:

$$\rho'(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}, \quad \forall x, y \in X$$

以及度量:

$$\rho''(x, y) = \log(1 + \rho(x, y)), \quad \forall x, y \in X$$

它们是不同的度量. 但是容易验证, 对于空间 X 中的点列 $\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0(\rho) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0(\rho') \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0(\rho'')$.

习题

1. 设 $\{x^{(m)}\}$ 是度量空间 l^2 中的点列, $x^{(0)} \in l^2$, 证明: 如果 $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x^{(m)}, x^{(0)}) = 0$, 那么对于任何 n , $\lim_{m \rightarrow \infty} |x_n^{(m)} - x_n^{(0)}| = 0$, 并举例说明逆命题不正确.
2. 设 (X, ρ) 是度量空间, 证明: 上面引进的 ρ' 和 ρ'' 也是 X 上的度量, 并且其中点列收敛是一致的.
3. 证明对于例1.1.15中的度量空间 $(\mathbb{R}^\infty, \rho)$, 点列按照度量收敛等价于各个分量都收敛.
4. 在三维Euclid空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 考虑单位球面

$$S^2 = \{x: x = (x_1, x_2, x_3), x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

对于 $x, y \in S^2$, 规定 $d(x, y)$ 为过 x, y 两点的大圆上以 x, y 为端点的劣弧的弧长. 证明 $d(x, y)$ 是 x, y 间的距离, 它不是Euclid距离. 如果用 $\rho(x, y)$ 表示Euclid距离, 那末

$$\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq \frac{\pi}{2} \rho(x, y)$$

5. X 是 $[0, 1]$ 上多项式全体. 当 $P, Q \in X$, 记 $P - Q = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, 在 X 上分别作

$$\rho_1(P, Q) = \max_{x \in [0, 1]} |P(x) - Q(x)|$$

$$\rho_2(P, Q) = \sum_{i=0}^n |a_i|$$