复变函数讲义

suwx@fudan.edu.cn

2020 年 2 月 11 日

目录

第一章　复数与拓扑

复变函数理论研究复平面上全纯（亚纯）函数的性质，应用于代数（多项式方程），数论（椭圆函数，zeta 函数），几何（双曲流形，极小曲面），实分析（调和函数）等.

参考书: Ahlfors, Complex Analysis, Third Edition. Stein-Shakarchi, Complex Analysis. 历史注记见 Stillwell, Mathematics and Its History.

第 1 节　共形映射

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为开集, 映射 $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ 具有连续偏导数. 记 $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, 则 f 的 Jacobian 矩阵

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Df 是 f 的线性部分.

定义 1.1. *若 $|Df| > 0$ 且 Df 保角, 则称 f 为共形映射.*

假设 f 为共形映射. 记 $A = Df$, 则 A 是一个共形矩阵:

$$\frac{\langle A(v_1), A(v_2)\rangle}{|A(v_1)||A(v_2)|} = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{|v_1||v_2|}.$$

练习 1　验证 $A^TA = \lambda I, \lambda > 0$.

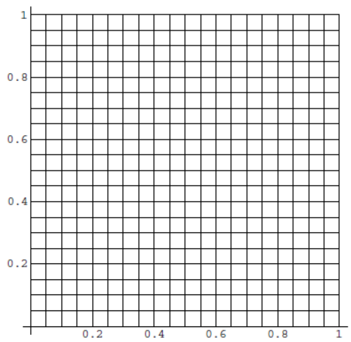
记 $A = \sqrt{\lambda}B$, 则 $B^TB = I$. 由于 $|B| > 0$, 故 $B \in SO(2,\mathbb{R})$. 所以

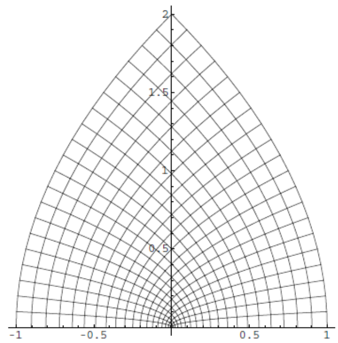
$$A = \lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

这说明共形映射 f 满足 *Cauchy-Riemann* 方程:

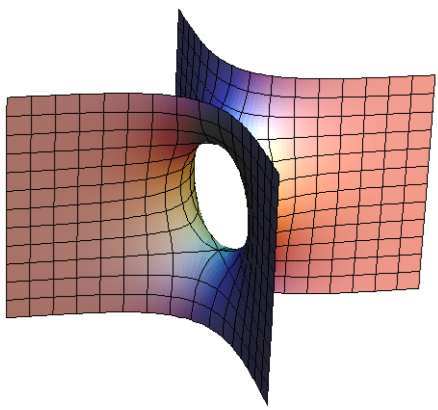
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

例子 1 $f(x,y)=(x^2-y^2,2xy), Df=\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$





练习 2 试给出 $f:\Omega\to\mathbb{R}^3$ 为共形映射的定义.



第 2 节 复数

记号：$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$. 复数域 $\mathbb{C}=\mathbb{R}[i], i^2=-1$. $\mathbb{C}$ 中的元素表示为 $z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$. 分别用 $\mathrm{Re}(z)$ 和 $\mathrm{Im}(z)$ 来表示 z 的实部和虚部. 复数的加法和乘法运算满足:

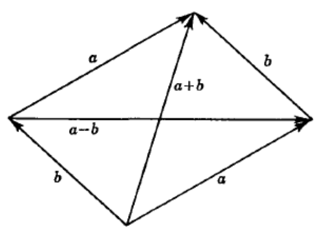
$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$

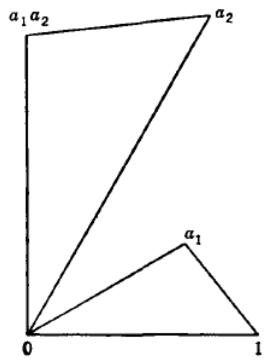
$$z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

共轭 $\bar{z} := x - iy$, 满足 $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$. $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ 称为 z 的模 (范数). 若 $z \neq 0$, 则 $\frac{1}{z} := \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ 满足 $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

注记 1　复数域 $\mathbb{C}$ 是一个代数闭域.

我们将 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, 赋予平面拓扑, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ 对应于欧氏距离. 复数的加法表示为向量相加:





为理解复数的乘法, 记 (r,θ) 为 z 的极坐标, 则 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), r = |z|, \theta = \arg z \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 称为 z 的辐角. 复数的乘法表示为向量的拉伸和旋转:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1||z_2|[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= |z_1||z_2|\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right). \end{aligned}$$

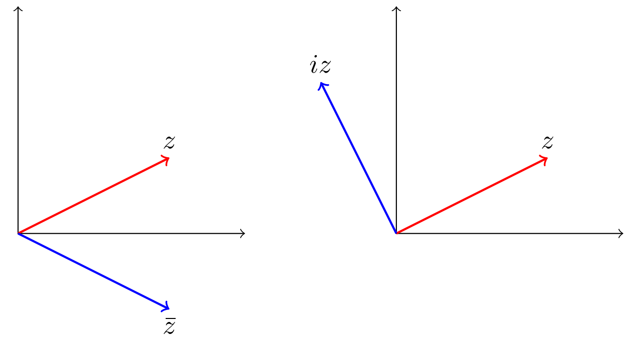
以上等式应该用几何的方式证明. 首先不难验证 $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$. 为验证 $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, 我们将 z_1 乘以 z_2 可以看作三角形的相似变换:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

所以 $\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2, \sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$.

例子:



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

练习 3 验证 $\mathrm{Re}(z\bar{w})$ 表示向量的内积. $\mathrm{Im}(z\bar{w})$ 有什么几何意义?

例子 2 线性映射 $f(z) = az + b$ $(a \neq 0)$ 为共形映射. 例子 $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ 用复数表示为 $f(z) = z^2$.

第 3 节 黎曼球面

复平面 $\mathbb{C}$ 是非紧的. 定义 $\mathbb{C}$ 的"一点紧化" $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ∞ 的邻域定义为 $\{\infty\} \cup V$, V 为 $\mathbb{C}$ 为任意紧集的补集. 称 $\mathbb{C}_\infty$ 为扩充复平面或黎曼球面. 通过球极投影, $\mathbb{C}_\infty \cong S^2$.