

复变函数讲义

suwx@fudan.edu.cn

2020 年 2 月 11 日

目录

第一章 复数与拓扑	3
第 1 节 共形映射	3
第 2 节 复数	4
第 3 节 黎曼球面	6
第 4 节 复平面的拓扑	8
第 5 节 绕数	10
第 6 节 历史注记	13
第 7 节 练习	15
第二章 全纯函数	17
第 1 节 全纯函数的定义	17
第 2 节 分式线性变换	21
第 3 节 双曲几何	25
第 4 节 幂级数	28
第 5 节 指数函数	30
第 6 节 练习	34
第三章 复积分	38
第 1 节 曲线上的积分	38
第 2 节 微分形式和 Stokes 公式	41
第 3 节 Cauchy 积分公式	46
第 4 节 闭微分	51
第 5 节 Morera 定理	54
第 6 节 练习	58

第四章 全纯和半纯函数	61
第 1 节 Cauchy 定理的一般形式	61
第 2 节 全纯函数的孤立奇点	64
第 3 节 留数定理	68
第 4 节 分歧覆盖	72
第 5 节 留数和积分计算	74
第 6 节 黎曼 zeta 函数	78
第 7 节 练习	82
第五章 双全纯映射	90
第 1 节 黎曼映射定理	90
第 2 节 边界对应	93
第 3 节 Schwarz-Christoffel 公式	96
第 4 节 单连通性	100
第 5 节 练习	104
第六章 调和函数	108
第 1 节 调和函数	108
第 2 节 Poisson 核	111
第 3 节 Dirichlet 问题	115
第 4 节 次调和函数	116
第 5 节 Green 函数	120
第 6 节 练习	124

第一章 复数与拓扑

复变函数理论研究复平面上全纯（亚纯）函数的性质，应用于代数（多项式方程），数论（椭圆函数，zeta 函数），几何（双曲流形，极小曲面），实分析（调和函数）等。

参考书：Ahlfors, Complex Analysis, Third Edition. Stein-Shakarchi, Complex Analysis. 历史注记见 Stillwell, Mathematics and Its History.

第 1 节 共形映射

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为开集，映射 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ 具有连续偏导数。记 $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ ，则 f 的 Jacobian 矩阵

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Df 是 f 的线性部分。

定义 1.1. 若 $|Df| > 0$ 且 Df 保角，则称 f 为共形映射。

假设 f 为共形映射。记 $A = Df$ ，则 A 是一个共形矩阵：

$$\frac{\langle A(v_1), A(v_2) \rangle}{|A(v_1)||A(v_2)|} = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1||v_2|}.$$

练习 1 验证 $A^T A = \lambda I, \lambda > 0$ 。

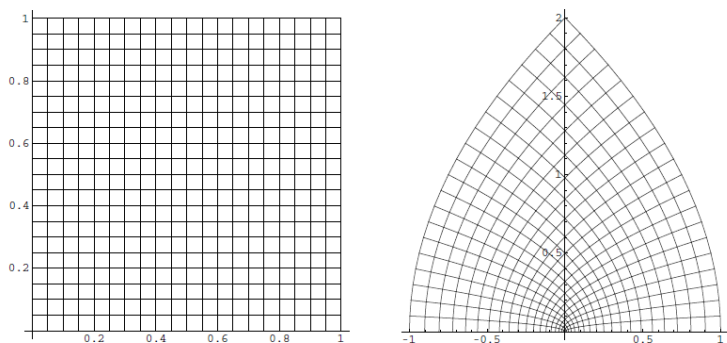
记 $A = \sqrt{\lambda}B$ ，则 $B^T B = I$ 。由于 $|B| > 0$ ，故 $B \in SO(2, \mathbb{R})$ 。所以

$$A = \lambda \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

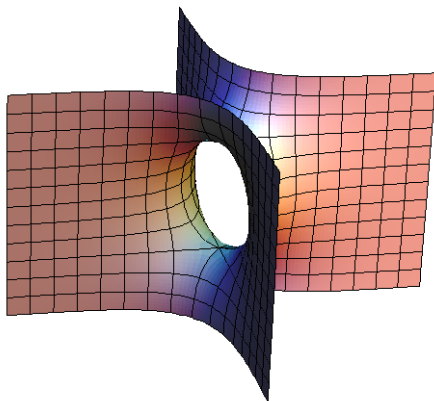
这说明共形映射 f 满足 *Cauchy-Riemann* 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

例子 1 $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy), Df = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$



练习 2 试给出 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为共形映射的定义.



第 2 节 复数

记号: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. 复数域 $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i], i^2 = -1$. $\mathbb{C}$ 中的元素表示为 $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$. 分别用 $\operatorname{Re}(z)$ 和 $\operatorname{Im}(z)$ 来表示 z 的实部和虚部. 复数的加法和乘法运算满足:

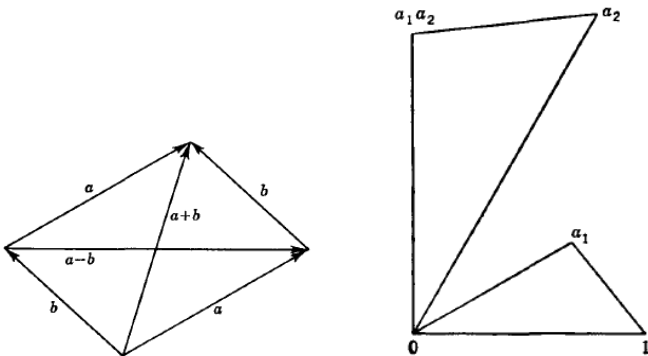
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

共轭 $\bar{z} := x - iy$, 满足 $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$. $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ 称为 z 的模 (范数). 若 $z \neq 0$, 则 $\frac{1}{z} := \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ 满足 $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

注记 1 复数域 $\mathbb{C}$ 是一个代数闭域.

我们将 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, 赋予平面拓扑, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 对应于欧氏距离. 复数的加法表示为向量相加:



为理解复数的乘法, 记 (r, θ) 为 z 的极坐标, 则 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $r = |z|$, $\theta = \arg z \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 称为 z 的辐角. 复数的乘法表示为向量的拉伸和旋转:

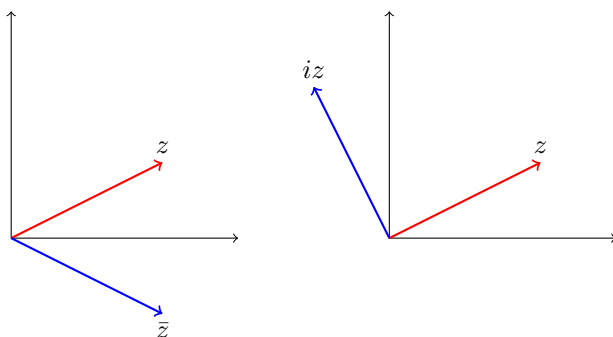
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1||z_2|[\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

以上等式应该用几何的方式证明. 首先不难验证 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. 为验证 $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, 我们将 z_1 乘以 z_2 可以看作三角形的相似变换:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以 $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$, $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$.

例子:



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

练习 3 验证 $\operatorname{Re}(z\bar{w})$ 表示向量的内积. $\operatorname{Im}(z\bar{w})$ 有什么几何意义?

例子 2 线性映射 $f(z) = az + b$ ($a \neq 0$) 为共形映射. 例子 $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ 用复数表示为 $f(z) = z^2$.

第 3 节 黎曼球面

复平面 $\mathbb{C}$ 是非紧的. 定义 $\mathbb{C}$ 的“一点紧化” $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ∞ 的邻域定义为 $\{\infty\} \cup V$, V 为 $\mathbb{C}$ 为任意紧集的补集. 称 $\mathbb{C}_\infty$ 为扩充复平面或黎曼球面. 通过球极投影, $\mathbb{C}_\infty \cong S^2$.

