

实变函数讲稿

2018 年 6 月 12 日

目录

第一章 实数和直线上的点集	1
1.1 实数	1
1.2 实数列的极限	8
1.3 直线上的点集	16
1.3.1 实数直线和区间	17
1.3.2 开集	17
1.3.3 极限点	19
1.3.4 闭集	21
1.4 映照、有限集与无限集	26
1.4.1 映照	26
1.4.2 对等	27
1.4.3 有限集和无限集	30
1.4.4 等价关系	31
1.4.5 顺序关系	32
1.5 Cantor集	34
1.6 习题	38
第二章 Lebesgue测度	39
2.1 外侧度	39
2.2 可测集	43
2.3 可测集的构造	50
2.3.1 环与代数	50
2.3.2 σ -环和 σ -代数	51
2.3.3 单调类	52
2.3.4 Lebesgue可测集的构造	53

2.4	Lebesgue测度的性质	54
2.4.1	测度的基本性质	54
2.4.2	测度的平移不变性和反射不变性	58
2.4.3	不可测集	58
第三章	Lebesgue可测函数	61
3.1	函数与集合	61
3.1.1	上限集与下限集	61
3.1.2	函数与集	64
3.1.3	集的特征函数	65
3.2	可测函数的定义和基本性质	68
3.2.1	可测函数的定义	68
3.2.2	可测函数的基本性质	68
3.3	可测函数列的极限	71
3.3.1	Lebesgue可测函数和Borel可测函数	72
3.3.2	几乎处处	73
3.3.3	Egoroff定理	74
3.4	可测函数和连续函数	75
3.5	依测度收敛	78
3.6	习题	82
第四章	Lebesgue积分	83
4.1	测度有限的集合上有界可测函数的积分	83
4.2	一般可测集上可测函数的积分	90
4.3	极限定理	99
4.3.1	控制收敛定理	99
4.3.2	Levi引理和Fatou引理	104
4.3.3	$L^1(\mathbb{R})$ 空间	106
4.3.4	极限定理的注	108
第五章	微分和积分	113
5.1	单调函数	113
5.1.1	单调函数的定义与基本性质	113
5.1.2	单调函数的导数	115

5.2	有界变差函数	122
5.3	不定积分	128
5.3.1	不定积分的求导	129
5.3.2	Lebesgue点	130
5.3.3	全连续函数	131
5.3.4	Newton-Leibniz公式	133
5.4	习题	134
第六章	平面上的Lebesgue测度与积分	137
6.1	平面上的点集	137
6.1.1	开集	137
6.1.2	闭集	138
6.2	平面上的Lebesgue测度	140
6.2.1	外测度	140
6.2.2	可测集	142
6.3	平面上的积分与Fubini定理	145
6.3.1	截口	145
6.3.2	Fubini定理	146
6.3.3	卷积	152
第七章	一般的测度空间	155
7.1	测度空间	155
7.2	外测度	156
7.2.1	外测度	156
7.2.2	测度的延拓	159
7.2.3	μ^* -可测集	164
7.3	乘积测度	166
7.3.1	测度的加法	166
7.3.2	乘积空间	166
7.3.3	截口	167
7.3.4	乘积测度	167
7.3.5	Fubini定理	168
7.3.6	乘积测度的完全性	173
7.4	广义测度	174
7.4.1	Hahn分解	174
7.4.2	Radon-Nikodym导数	176

第一章 实数和直线上的点集

1.1 实数

尽管人们早就在应用实数——有理数或无理数，然而什么是实数？这个问题直到十九世纪后半叶才得到严格解决，这是数学史上最令人惊奇的事实之一。这方面的理论大体分为两类，一类由Cantor(1872)，Méray(1869)和Weierstrass(1860)分别获得的，他们的形式虽略有差异，但实质是差不多的，这就是我们将要介绍的、以有理数为基础来建立实数的理论，这种方法具有普遍意义。另一类是Dedekind(1872)的理论。

定义 1.1.1 • 设 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 是一列有理数。如果对于任意的正有理数 ε ，有自然数 N ，使得当 $n, m \geq N$ 时不等式

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad (1.1)$$

成立，就称 $\{a_n\}$ 是基本有理数列。

- 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个基本有理数列，若对任一正有理数 ε ，有自然数 N ，使得当 $n \geq N$ 时不等式

$$|a_n - b_n| < \varepsilon \quad (1.2)$$

成立，就称基本有理数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 相等，记做 $\{a_n\} = \{b_n\}$ 。

- 我们称基本有理数列是实数。规定相等的基本有理数列是同一个实数。实数的全体记为 $\mathbb{R}$ 。

引理 1.1.2 基本有理数列 $\{a_n\}$ 是有界的，即存在有理数 M ，使得对一切自然数 n ，成立着

$$|a_n| \leq M$$

证明： 因为 $\{a_n\}$ 是基本有理数列，所以对 $\varepsilon = 1$ 有自然数 N ，使得当 $n, m \geq N$ 时(1.1)成立。特别的，有：

$$|a_n - a_N| < 1$$

从而当 $n \geq N$ 时有

$$|a_n| < |a_N| + 1$$

令 $M = \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N| + 1\}$, 那末 M 是有理数, 而且对一切自然数 n 都有

$$|a_n| \leq M$$

QED.

引理 1.1.3 1. 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是两个基本有理数列, 那末 $\{a_n + b_n\}, \{a_n b_n\}$ 都是基本有理数列.

2. 设 $\{a_n\}, \{a'_n\}, \{b_n\}, \{b'_n\}$ 都是基本有理数列。如果

$$\{a_n\} = \{a'_n\}, \quad \{b_n\} = \{b'_n\}$$

$$\text{则有: } \{a_n + b_n\} = \{a'_n + b'_n\}, \{a_n b_n\} = \{a'_n b'_n\}$$

证明: 由引理 1.1.2, 有正有理数 A 使得对一切自然数 n 成立着

$$|a_n| < A, \quad |a'_n| < A, \quad |b_n| < A, \quad |b'_n| < A$$

设 ε 是一个正有理数, 有自然数 N 使得下列不等式成立

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &< \frac{2\varepsilon}{A}, & |a'_n - a'_m| &< \frac{2\varepsilon}{A}, & \forall n, m \geq N \\ |b_n - b_m| &< \frac{2\varepsilon}{A}, & |b'_n - b'_m| &< \frac{2\varepsilon}{A}, & \forall n, m \geq N \end{aligned}$$

那末当 $n, m \geq N$ 时,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a_m b_m| &= |a_n(b_n - b_m) + b_m(a_n - a_m)| \\ &\leq A|b_n - b_m| + A|a_n - a_m| < \varepsilon \end{aligned}$$

所以 $\{a_n b_n\}$ 是基本有理数列。又当 $n \geq N$ 时,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a'_n b'_n| &= |a_n(b_n - b'_n) + b'_n(a_n - a'_n)| \\ &\leq A|b_n - b'_n| + A|a_n - a'_n| < \varepsilon \end{aligned}$$

所以 $\{a_n b_n\} = \{a'_n b'_n\}$.

其余的部分也可以类似地证明.

QED.

利用引理 1.1.3 可以规定实数的运算如下:

定义 1.1.4 设 $a = \{a_n\}, b = \{b_n\}$ 是两个实数, 称实数 $\{a_n + b_n\}$ 为 “ a 加 b ” 的和, 记做 $a + b$; 称 $\{a_n b_n\}$ 为 “ a 乘 b ” 的积, 记做 $a \cdot b$ 或 ab .

引理 1.1.3 说明了 $a + b, a \cdot b$ 是实数, 而且有确定的意义。

容易证明下面的定理:

定理 1.1.5 实数全体 $\mathbb{R}$ 按照上述的加法及乘法成为一个域. 换句话说, $\mathbb{R}$ 具有下面各项性质:

1. $\mathbb{R}$ 按照加法成为交换群:

(a) 当 $a, b \in E^1$ 时, $a + b \in \mathbb{R}$

(b) 加法结合律: 如果 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 那末 $a + (b + c) = (a + b) + c$

(c) 存在零元素 $0 = \{0, 0, \dots\} \in \mathbb{R}$, 对一切 $a \in \mathbb{R}$,

$$a + 0 = a$$

(d) 对于每一个 $a \in \mathbb{R}$, 有负元素 $-a \in E$, 使得

$$a + (-a) = 0$$

(e) 加法交换律: 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 那末 $a + b = b + a$

2. $\mathbb{R}$ 中的非零元素全体按照乘法成一交换群:

(a) 当 $a, b \in \mathbb{R}$ 时, $ab \in \mathbb{R}$

(b) 乘法结合律: 如果 $a, b, c \in E$, 那末 $a(bc) = (ab)c$

(c) 存在单位元素 $1 = \{1, 1, \dots\} \in \mathbb{R}$, 使一切 $a \in \mathbb{R}$

$$a \cdot 1 = a$$

(d) 如果 $a \in \mathbb{R}$ 而且 $a \neq 0$, 那末有逆元素 $a^{-1} \in \mathbb{R}$, 使得

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

(e) 乘法交换律: 对任意的 $a, b \in \mathbb{R}$, 有 $a \cdot b = b \cdot a$

3. 乘法与加法之间的分配律: 如果 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 那末

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

证明: 我们只证明(2d)和(3).

先对于实数 $a \neq 0$, 证明存在逆元素 $a^{-1} \in \mathbb{R}$, 使得

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

设 $a = \{a_n\} \in \mathbb{R}, a \neq 0$, 那末存在正有理数 ε 以及自然数 N_ε , 当 $n \geq N_\varepsilon$ 时, $|a_n| \geq \varepsilon$.

不然的话, 对每个正有理数 ε , 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中有 $\{a_n\}$ 的无限项, $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$, 即 $|a_{n_k}| < \varepsilon$, 因为 $\{a_n\}$ 是基本数列, 有自然数 N 得当 $n, m \geq N$ 时(1.1)成立, 取一个 $n_k \geq N$, 那末就知道当 $n \geq N$ 时

$$|a_n| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k}| < 2\varepsilon$$

由此得到: $a = 0$.

规定 $a^{-1} = \{a'_n\}$ 如下:

$$a'_i = \begin{cases} a_n, & \text{当 } n < N_\varepsilon \\ \frac{1}{a_n} & \text{当 } n \geq N_\varepsilon \end{cases}$$

现在证明 $\{a'_n\}$ 是基本有理数列. 事实上, 当 $n, m \geq N_\varepsilon$ 时

$$|a'_n - a'_m| = \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m} \right| = \frac{|a_n - a_m|}{|a_n a_m|}$$

由于对任意的正有理数 η , 存在自然数 N' , 使得当 $n, m \geq N'$ 时, $|a_n - a_m| < \eta\varepsilon^2$. 又当 $n, m \geq N_\varepsilon$ 时, $|a_n a_m| \geq \varepsilon^2$, 从而当 $n, m \geq \max\{N_\varepsilon, N'\}$ 时成立

$$|a'_n - a'_m| < \eta$$

所以 $\{a'_n\}$ 是基本有理数列, 因此 $a^{-1} = \{a'_n\} \in \mathbb{R}$. 由于

$$a \cdot a^{-1} = \{a_1^2, a_2^2, \dots, a_{N_\varepsilon-1}^2, 1, 1, \dots, 1, \dots\}$$

这个数列从第 N_ε 项以后全是1, 它等于 $1 = \{1, 1, \dots\}$, 因此

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

现在来证明3. 设 $a = \{a_n\}, b = \{b_n\}, c = \{c_n\}$. 于是

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= \{a_n(b_n + c_n)\} = \{a_n b_n + a_n c_n\} \\ &= \{a_n b_n\} + \{a_n c_n\} = ab + ac \end{aligned}$$

其余各项作为练习，请读者自己证明。

QED.

我们简记 $a + (-b) = a - b$ ，称为 a 减 b 的差。容易明白： $0 - a = -a$ 。

当 $b \neq 0$ 时，简记 $a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$ (或 a/b)，称为 a 除以 b 的商，或称为 a 与 b 的比值，也可记做 $a : b$ 。

容易看出，如果 $a = \{a_n\}, b = \{b_n\}$ ，那末 $a - b = \{a_n - b_n\}$ ；当 $b \neq 0$ ，并且一切 b_n 全不为 0 时， $ab = \{a_n/b_n\}$ 。

定义 1.1.6 设 $a = \{a_n\}, b = \{b_n\}$ 是两个实数。

- 假如有正有理数 δ 和自然数 N ，使得当 $n \geq N$ 时，

$$a_n > \delta$$

那末称 a 大于 0，记为 $a > 0$ 。

- 如果 $a - b > 0$ ，就称 a 大于 b ，记为 $a > b$ ；或者称 b 小于 a ，记为 $b < a$ 。

容易证明，若基本有理数列 $\{a_n\} = \{a'_n\}, \{b_n\} = \{b'_n\}$ ，那末当 $\{a_n\} < \{b_n\}$ 时， $\{a'_n\} < \{b'_n\}$ ，所以 $a < b$ 有确定的意义。

定理 1.1.7 设 a, b 是两个实数，那末三个关系

$$a = b, \quad a < b, \quad a > b$$

有一个成立，而且只有一个成立。

证明： 因为 $a = \{a_n\}, b = \{b_n\}$ 都是基本有理数列，所以对于任一正有理数 ε ，有正整数 N ，使得当 $m \geq N$ 时有

$$|a_m - a_N| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |b_m - b_N| < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此

$$|(a_m - b_m) - (a_N - b_N)| < \varepsilon$$

也就是

$$a_N - b_N - \varepsilon < a_m - b_m < a_N - b_N + \varepsilon \quad (1.3)$$

假如有一个 ε 和 N ，使得上式两端 $a_N - b_N - \varepsilon$ 及 $a_N - b_N + \varepsilon$ 同号。譬如说是正号，那末，令 $a_N - b_N - \varepsilon = \delta$ ，当 $m \geq N$ 时

$$a_m - b_m > \delta$$

这就是说, $a > b$. 类似地如果(1.3)两端同时为负号, 可证 $b > a$.

如果对一切正有理数 ε , (1.3)两端异号, 就是

$$a_N - b_N - \varepsilon < 0, \quad a_N - b_N + \varepsilon > 0$$

即

$$|a_N - b_N| < \varepsilon$$

因此, 由(1.3), 对每个正有理数 ε , 有自然数 N , 使当 $m \geq N$ 时,

$$|a_m - b_m| < \varepsilon + |a_N - b_N| < 2\varepsilon$$

这就证明了 $a = b$.

因此 $a = b$, $a < b$ 或 $a > b$ 三个关系至少有一个成立. 至于上述关系不可能有两个同时成立, 容易从定义直接验证. QED.

此外还可以证明, 实数的顺序与代数运算之间有下列的基本关系:

定理 1.1.8 设 a, b, c 是三个实数, 如果 $a < b$, 那末 $a + c < b + c$. 如果又有 $0 < c$, 那末 $a \cdot c < b \cdot c$. 特别地, $a > 0$ 与 $-a < 0$ 是等价的.

定义 1.1.9 大于0的实数称为正数, 小于0的实数称为负数.

设 a 是实数, 记 $|a|$ 为如下的实数: 当 $a \geq 0$ 时, $|a| = a$; 当 $a < 0$ 时, $|a| = -a$, 称 $|a|$ 为实数 a 的绝对值.

容易证明: 如果 $\{a_n\}$ 是基本有理数列, $a = \{a_n\}$, 那末 $|a| = \{|a_n|\}$.

定理 1.1.10 设 a 和 b 都是实数, 那末 $|ab| = |a||b|$, 并且

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

我们还要把有理数的一部分实数等同起来. 对任何有理数 r , 显然

$$\tilde{r} = \{r, r, \dots, r, \dots\}$$

是一个基本有理数列, 即是一个实数, 称 $\tilde{r}$ 是相应于有理数 r 的实数. 记 R_0 为有理数全体, $\tilde{R}_0$ 是相应于有理数的实数全体. 容易看出映照

$$r \mapsto \tilde{r}$$

是 R_0 与 $\tilde{R}_0$ 间的一一对应, 而且在这个映照下, 代数运算和“大小”顺序关系保持不变, 就是说:

$$\widetilde{(r_1 + r_2)} = \tilde{r}_1 + \tilde{r}_2, \quad \widetilde{r_1 r_2} = \tilde{r}_1 \tilde{r}_2$$

$$r_1 < r_2 \quad \text{隐含} \quad \tilde{r}_1 < \tilde{r}_2$$

今后我们就把 r 和 $\tilde{r}$ 等同起来. 这是可以的, 因为对于实数来说, 只要代数运算和大小顺序没有改变就行了. 这样一来, 有理数就是实数的一部分了.

我们来证明有理数在实数中是处处稠密的, 就是要证明一定存在有理数介于任何两个不同的实数之间.

定理 1.1.11 设 a, b 是两个实数, $a < b$, 那末存在有理数 r 适合

$$a < r < b$$

证明: 设 $a = \{a_n\}, b = \{b_n\}$, 由于 $\{a_n\} < \{b_n\}$, 则存在正有理数 δ 和自然数 N , 使得当 $n \geq N$ 时有

$$b_n - a_n > \delta$$

又因为 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 是基本数列, 存在 $N_1 \geq N$, 使得当 $m, n \geq N_1$ 时

$$|a_n - a_m| < \frac{\delta}{4}, \quad |b_n - b_m| < \frac{\delta}{4}$$

取 $r = b_{N_1} - \frac{\delta}{2}$, 这是有理数, 并且当 $m \geq N_1$ 时有

$$b_m - r = b_m - b_{N_1} + \frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{4} > 0$$

所以 $\{b_m\} > \{r\}$; 又当 $m \geq N_1$ 时,

$$r - a_m = b_{N_1} - a_{N_1} + a_{N_1} - a_m - \frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{4} > 0$$

即 $\{r\} > \{a_n\}$.

QED.

习题

1. 设 x, y 是两个实数, 我们记 $x \vee y = \max\{x, y\}$, 记 $x \wedge y = \min\{x, y\}$. 证明

$$(a) \quad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

- (b) $x \wedge y + x \vee y = x + y$
 (c) $(-x) \wedge (-y) = -(x \vee y)$
 (d) $x \vee y + z = (x + z) \vee (y + z)$
 (e) 如果 $z \geq 0$, 那么 $z(x \vee y) = (zx) \vee (zy)$

2. 证明:

- (a) $|xy| = |x| \cdot |y|$
 (b) $|x + y| \leq |x| + |y|$
 (c) $|x| = x \vee (-x)$
 (d) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$
 (e) 如果 $-y \leq x \leq y$, 那么 $|x| \leq y$

1.2 实数列的极限

利用实数理论, 我们可以证明极限理论中的几个基本定理.

定义 1.2.1 设 $\{a_n\}$ 是一实数列. 如果有实数 a 适合如下的条件: 对于任何正实数 ε , 有自然数 N , 使得当 $n \geq N$ 时成立

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

那末称实数列 $\{a_n\}$ 收敛于极限 a , 记做 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

定理 1.2.2 (Cauchy收敛原理) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: 对于任一正(实)数 ε , 有自然数 N , 使得当 $n, m \geq N$ 时

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

证明: 必要性是显然的, 我们只要证明充分性. 为便于理解, 在下面的证明过程中, 暂时仍然把有理数和对应于有理数 r 的实数 $\tilde{r} = \{r\}$ 区别开来.

充分性的证明: 对于实数 a_n , 存在有理数 x_n , 使相应的实数 $\tilde{x}_n$ 满足:

$$a_n < \tilde{x}_n < a_n + \left(\frac{1}{n}\right)$$

对于任一正有理数 δ , 由假设, 存在自然数 N (不妨取 $N > \frac{4}{\delta}$), 使得当 $n, m \geq N$ 时,

$$|a_n - a_m| < \left(\frac{\delta}{4}\right)$$