代数拓扑讲义

吕志
复旦大学数学科学学院

内容提要

1 单纯同调论

代数拓扑学的基本问题是空间的分类，包括同胚分类和同伦分类等。在点集拓扑中，我们利用一些基础的拓扑性质，例如紧性、可数性、连通性等来处理这一问题。然而总得来说，以上点集拓扑的工具都只是定性的分析，有很多看上去非常简单的情况也很难用点集拓扑的工具来判定。因此，需要引入定量计算来对空间进行更精确的分类。在代数拓扑学之前，空间的定量计算一般总是依赖于度量的，但是Poíncaré等数学家通过引入同调群$H_i(X)$和同伦群$\pi_i(X)$这样的拓扑不变量，从空间中提取出代数信息，使得定量计算能够对没有度量的一般拓扑空间进行，这种思想也就为今天的代数拓扑学奠定了基础。本科的拓扑学习中一般都包含这种做法的一个典型例子－－基本群，它是同伦群的特例。另一个非常重要的理论就是同调理论，本章我们将首先研究同调理论最早也是最直观的形态－－单纯同调论。

1.1 单纯复形

历史上数学家们最先考虑的是一种被称为多面体（Polyhedron）的拓扑空间，在其上发展出了单纯同调理论。粗略地说，这种空间可以被一些“砖块”按照一定的规则拼起来，通过把一个比较复杂的空间还原成这些“砖块”，我们实际上进行了一个类似于离散化的操作。为此，我们先引入这些最基本的“砖块”－－单形，它可以看作是线段、三角形或四面体的推广。一般地，我们在$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R}^{\infty} = \{(x_0, x_1, x_2...)\,|x_i \in \mathbb{R}$, 只有有限个$x_i \neq 0\}$中定义单形。

定义1.1.1 (几何独立)**.** 在$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$中，$p+1$个点$a_0, a_1, ..., a_p$称为是几何独立的，如果$a_1-a_0, a_2-a_0, ..., a_p-a_0$是线性无关的。

直观上，两个几何独立的点决定一条线段，三个几何独立的点决定一个平面，以此类推，$p+1$个几何独立的点决定一个p维的仿射子空间。

定义1.1.2 (单形)**.** 设$a_0, a_1, ..., a_p$是$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$中$p+1$个几何独立的点，则

$$\sigma^p = (a_0, a_1, ..., a_p) = \left\{\sum\nolimits_{i=0}^{p} \lambda_i a_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum\nolimits_{i=0}^{p} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\right\}$$

称为p维单形。

注记1.1.1. *1.* 单形$(a_0, a_1, ..., a_p)$实际上是$p+1$个点$a_0, a_1, ..., a_p$的凸包（*convex hull*）。

2. 对于$\{i_0, i_1, ..., i_q\} \subseteq \{0, 1, ..., p\}$，$a_{i_0}, a_{i_1}, ..., a_{i_q}$也是几何独立的，因此

$$\tau^q = \left(a_{i_0}, a_{i_1}, ..., a_{i_q}\right)$$

是q维单形，称为σ^p的q维面，记作$\tau^q \prec \sigma^p$或$\tau^q \subseteq \sigma^p$。特别地，如果$q < p$，则称$\tau^q$是$q$维真面。

3. 对于任意的$x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i(x) a_i \in \sigma^p$，容易证明$\lambda_i(x)$是关于$x$的连续函数，称为$x$的坐标函数。

下述定义对单形的“拼接方式”作出了规定，确保得到的空间具有较好的性质：

定义1.1.3 (单纯复形). 设K是$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$中若干单形的集合，如果：

1. $\sigma \in K \Rightarrow \forall \tau \prec \sigma, \tau \in K$,
2. $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in K, \sigma_1 \cap \sigma_2$或者是空集，或者是$\sigma_1$和$\sigma_2$的公共面。

则称K是单纯复形，简称复形。$dimK = \max\limits_{\sigma \in K} \{\dim \sigma\}$ 称为复形的维数。

注记1.1.2. 1. 若K是有限集，则称为有限复形。有限复形显然是有限维的，但反之未必。

2. 如果$L \subseteq K$，并且L本身也是复形，则称L是K的子复形。

例1.1.1. 1. 设$\sigma_p = (a_0, a_1, ..., a_p)$是一个$P$维单形，则容易验证

$$K_{\sigma^p} = Cl_{\sigma^p} \triangleq \{\tau | \tau \prec \sigma^p\},$$

$$Bd_{\sigma^p} \triangleq \{\tau | \tau \prec \sigma^p, \tau \neq \sigma^p\}$$

都是复形，分别称为σ_p的闭包复形和边缘复形，几何上看是很直观的。

2. 设K是一个复形，则

$$K^{(p)} \triangleq \{\sigma \in K | \dim \sigma \leq p\}$$

也是复形，从而是K的子复形，称为K的p维骨架。

以上定义的复形形式上只是一个单形的集合，我们要把它转化为拓扑空间，尤其是需要定义一个拓扑。

定义1.1.4 (复形的伴随多面体). 设K是$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$中的复形，

$$|K| \triangleq \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

称为K的伴随多面体或K的几何实现。其上的拓扑定义如下：
$A \subseteq |K|$为闭子集$\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \sigma \in K, A \cap \sigma \subseteq \sigma$是$\sigma$的闭子集。
这里单形σ是某个有限维欧氏空间的子空间，其上的拓扑取为欧式拓扑。

注记1.1.3. 1. 对于K是有限维复形（未必是有限复形）的情况，总是存在$n \in \mathbb{N}$，使得$|K| \subseteq \mathbb{R}^n$。自然会问上面定义的拓扑（以后记为$\mathscr{T}_{|K|}$）和欧式拓扑的限制拓扑（即$\mathscr{T}_E|_{|K|}$，以后简记为$\mathscr{T}_E$）是否一致。如果$K$有限复形，容易验证答案是肯定的；如果$K$不是有限的，则二者未必一致。考虑：

$$K = \left\{ \left[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m} \right] \right\}_{m=1}^{\infty} \cup \left\{ \frac{1}{m} \right\}_{m=1}^{\infty} \cup \{0\}$$

易见，$|K|$作为集合就是闭区间$[0,1]$。它是一个一维复形，也是无限复形。设：

$$A = \left\{ \frac{1}{m} \right\}_{m=1}^{\infty} \subseteq |K|$$

则A在拓扑$\mathscr{T}_{|K|}$下是闭集，因为它和每一个单形的交或者是空集，或者是离散点集；但A显然不是$\mathscr{T}_E$下的闭集。
一般地，不难证明$\mathscr{T}_E \subseteq \mathscr{T}_{|K|}$，即复形上的拓扑比欧式拓扑要细。

2. 对于K是无限维复形的情况，也有类似的结论，但此时需要先定义无穷维空间$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$上的“欧式拓扑”，这里从略。

3. 设$L \subseteq K$是子复形，则$|L|$是$|K|$的闭子集。

Proof. 设$A \subseteq |L|$是闭集。由于$\forall \sigma \in K,\ \sigma \cap A = \bigcup_{\tau \in L} \tau \cap \sigma \cap A = \bigcup_{\tau \in L, \tau \prec \sigma} \tau \cap A$,
而$A \cap \tau$是τ的闭集，进而是σ的闭集，并且这样的τ只有至多有限个。
所以$\sigma \cap A$是σ的闭集。按复形拓扑的定义，A在$|K|$中是闭集。
特别地，取$A = |L|$即得结论。 □

由于复形的拓扑$\mathscr{T}_{|K|}$并不总与欧式拓扑一致，因此空间$\left(|K|\,,\mathscr{T}_{|K|}\right)$的点集拓扑性质并不一目了然。例如，读者可以试着证明空间的分离性质，即验证$\left(|K|\,,\mathscr{T}_{|K|}\right)$是$T_4$空间。

初学者一般习惯从拓扑或者几何的角度来理解单纯复形，但实际上复形还可以看作是一个特殊的偏序集$(K, \prec)$，其中$\sigma \prec \tau$自然地定义为面的包含关系。更进一步，复形完全可以脱离几何直观而存在，即所谓“抽象单纯复形”。这意味着我们可以纯粹从组合的角度来研究复形，利用组合技巧去证明一些拓扑的结论。由于关于抽象单纯复形的简单讨论随后进行，这里先介绍一个基本概念：

定义1.1.5 (三角剖分)**.** 拓扑空间X称为可三角剖分的，如果存在复形K，使得$X \approx |K|$。此时称复形K是X的一个三角剖分。

可三角剖分的空间具有良好的拓扑性质，自然要问哪些空间是可三角剖分的，这是一个经典的拓扑学问题。1930s，Carins证明了任何光滑流形都可三角剖分。对于一般的流形，我们已经知道$1, 2, 3$维流形可三角剖分，但存在不可三角剖分的4维流形，而更高维的情况则是开放问题。可三角剖分的流形可以粗略地理解为带了组合结构的流形，事实上确实有“组合流形”这个数学名词，但是其定义更为复杂。这里需要说明的是，光滑流形和一般的流形（拓扑流形）并不是一回事，一个拓扑流形上可能存在多种微分结构，比如Milnor发现的7维怪球；而有些拓扑流形上则可能不存在微分结构。

定义1.1.6 (抽象单纯复形)**.** 设S是一个集合，其幂集（即S的子集全体构成的集合）记作2^S。设$\mathcal{K} \subseteq 2^S$，如果$a \in \mathcal{K} \Rightarrow \forall b \subseteq a,\ b \in \mathcal{K}$，则称$\mathcal{K}$ 是抽象单纯复形，b 称为a的一个面。

注记1.1.4. 1. 如果$\forall x \in S,\ \{x\} \in \mathcal{K}$，则称$\mathcal{K}$是$S$上的抽象复形。

2. 对于$\sigma \in \mathcal{K},\ dim(\sigma) = |\sigma| - 1,\ dim(\mathcal{K}) = \max_{\sigma \in \mathcal{K}} \{\dim \sigma\}$。

3. $\emptyset \in \mathcal{K}$，称为$-1$维单形。

如果K是之前所说的单纯复形，令$S = K^{(0)}$为顶点集，则

$$\mathcal{K}_K \triangleq \left\{\left\{a_{i_0}, a_{i_1}, ..., a_{i_p}\right\} \subseteq K^{(0)} |\left(a_{i_0}, a_{i_1}, ..., a_{i_p}\right) \in K\right\}$$

为其诱导的抽象单纯复形。反过来，给定一个抽象单纯复形，是否可以得到对应的单纯复形呢？

定义1.1.7 (抽象单纯复形的几何实现). 设S是一个集合，$\mathcal{K}$是S上的抽象单纯复形，K是单纯复形。如果存在双射$f: S \to K^{(0)}$，使得：

$$\left\{s_{i_0}, s_{i_1}, ..., s_{i_p}\right\} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \left(s_{i_0}, s_{i_1}, ..., s_{i_p}\right) \in K,$$

则称K是$\mathcal{K}$的几何实现。

注记1.1.5. 可以证明，一个抽象复形的所有几何实现的伴随多面体之间都是（分段线性）同胚的。

定理1.1.1. 任何n维的（有限）抽象单纯复形$\mathcal{K}$都在$\mathbb{R}^{2n+1}$中存在几何实现。

Proof. 记$\mathcal{K}^{(0)} = \{\{s_0\}, \{s_1\}, ..., \{s_N\}\}$，
对应于以上$N+1$个元素，需要恰当地安排它们在$\mathbb{R}^{2n+1}$中的位置（即它们对应的几何复形的顶点），使其张成的单形之间满足复形的相交条件。
考虑所谓循环曲线$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n+1}: \phi(t) = (t, t^2, t^3, ..., t^{2n+1})$.
令$K^{(0)} = \{a_i = \varphi(i) | i = 1, 2, ..., N\}$是要找的复形的顶点，
设$a_{i_0}, a_{i_1}, ..., a_{i_{2n+1}} \in K^{(0)} \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ 中任意$2n+2$个点，我们将证明它们是几何独立的。
（如果$2n+2 > N+1$，则用和下面类似的方法可以直接证这$N+1$个点是几何独立的。
事实上，由范德蒙行列式：

$$\begin{aligned} det\left(a_{i_1} - a_{i_0}, a_{i_2} - a_{i_0} ..., a_{i_{2n+1}} - a_{i_0}\right) &= \begin{vmatrix} i_1 - i_0 & \cdots & i_{2n+1} - i_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ i_1^{2n+1} - i_0^{2n+1} & \cdots & i_{2n+1}^{2n+1} - i_0^{2n+1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ i_0 & i_1 & \cdots & i_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_0^{2n+1} & i_1^{2n+1} & \cdots & i_{2n+1}^{2n+1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{0 \le k < l \le 2n+1} (i_k - i_l) \neq 0 \end{aligned}$$

因此这$2n+2$个点几何独立。
构造几何实现复形K如下：
$K^{(0)}$如上所述，

$$\left(a_{i_0}, a_{i_1}, ..., a_{i_p}\right) \in K \overset{def}{\Leftrightarrow} \left\{s_{i_0}, s_{i_1}, ..., s_{i_p}\right\} \in \mathcal{K}.$$

我们验证K满足复形的两个条件：

1. 显然。
2. 设$\sigma^p, \tau^q \in K$有r个公共顶点，则σ^p与τ^q一共有$p+q-r+2 \le 2n+2$个不同的顶点。由上面的证明，这些顶点是几何独立的，因此它们可以张成$\mathbb{R}^{2n+1}$中一个$p+q-r+1$维单形τ，使得$\sigma^p \prec \tau, \sigma^q \prec \tau$。
   因此$\sigma^p \cap \sigma^q$为$\emptyset$或它们的公共面。

□

推论1.1.1. n维复形K的伴随多面体可以嵌入$\mathbb{R}^{2n+1}$，即$|K| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$。

注记1.1.6. 上述维数是最佳的，即一般没有$|K| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$。
例如，$\left|K^{(n)}_{\sigma^{2n+2}}\right|$不能嵌入$\mathbb{R}^{2n}$。$n=1$时，就是如下的5顶点完全图，它不可平面化。