数学分析技巧选讲

楼红卫 编

中国教育出版传媒集团
高等教育出版社

内容提要

本书是编者将教学过程中积累的一些重要或有趣的方法整理汇编而成。全书共十二讲，包括问题的简化，Euler 公式，上、下极限的运用，微分 Darboux 定理，微分算子 D，线性方程组，摄动与逼近，连续性方法，等价关系与 L'Hôpital 法则，Euler 积分，最简分式的计算，连续模。另外，还选解了全国大学生数学竞赛的一些试题。

本书主要选取的技巧内容是编者认为学生比较欠缺以及思想性比较强的部分，希望通过具体的例子帮助学生熟悉这些技巧，进而体会数学分析中蕴涵的一些重要的数学思想。

本书适合作为数学类专业数学分析课程的辅导材料，部分内容也适合作为非数学类专业微积分课程的辅导材料。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析技巧选讲 / 楼红卫编 . -- 北京：高等教育出版社，2022. 7

ISBN 978-7-04-058700-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①楼… Ⅲ. ①数学分析 - 高等学校 - 教学参考资料 Ⅳ. ① O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2022）第 094674 号

Shuxue Fenxi Jiqiao Xuanjiang

策划编辑 李 蕊　　责任编辑 李 蕊　　封面设计 张 楠　　版式设计 马 云
责任绘图 于 博　　责任校对 刘娟娟　　责任印制 耿 轩

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 三河市吉祥印务有限公司
开 本 787mm × 960mm 1/16
印 张 10
字 数 170 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn

版 次 2022 年 7 月第 1 版
印 次 2022 年 7 月第 1 次印刷
定 价 20.60 元

物 料 号 58700-00

目录

1 问题的简化

解决数学问题的过程可以看做是把问题逐步简化的过程. 这里所指的简化特指那种“常规”的明显的简化, 简化后的问题通常与原问题等价. 这种简化能力是很多学生明显缺乏的, 因此, 我们把简化放在首位, 希望同学们在学习中渐渐养成简化问题的习惯.

需要指出, 尽管这种常规的简化比比皆是, 但要作为例题写出来并不简单, 因为我们这里所指的这些简化实在太简单了, 接近于数学证明常常用到的“不妨设”或“只需证”.

例 1.1 证明: $\forall x>0$, 成立

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

说明 自然, 利用 Young (杨) 不等式可得

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{x+1}}<\frac{x}{x+1}\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x+1}=1+\frac{1}{x+1},\quad \forall x>0,$$

从而

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1},\quad \forall x>0,$$

结合 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 可得要证的第一个不等式. 第二个不等式类似可证.

但是若没有想到上面这个证明方法, 要直接利用函数的导函数来证明单调性, 则可以作如下简化:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1},\qquad \forall x>0$$

$$\Updownarrow$$

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<1<(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),\quad \forall x>0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$1 - \frac{1}{x+1} < \ln(1+x) < x, \quad \forall x > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\ln(1+x) < x, \qquad \forall x > -1, x \neq 0.$$

例 1.2 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab.$$

说明 首先, 我们来看能否 "不妨设 $b=0$", 乃至 "不妨设 $a=b=0$". 若记 $\beta_n = b_n - b$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} \\
=& \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_1}{n} + \qquad \text{(若题目结论成立, 这一项必须为零)} \\
& b\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}. \qquad \text{(若题目结论成立, 这一项必须为 } ab\text{)}
\end{aligned}$$

以上过程把原问题化为了两个特例的证明. 因此, 至少没有走向错误的方向.

由 Stolz (施托尔茨) 公式, 确有

$$b\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = ab.$$

因此, 我们的焦点就变为证明

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_1}{n} = 0.$$

这是比原问题简单而又必须证明的. 我们把余下的证明留给读者.

例 1.3 设 f 在 (a,b) 内二阶可导, c 为 (a,b) 内一点, 满足 $f''(c) \neq 0$. 证明: 在 (a,b) 内存在 $x_1 \neq x_2$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

说明 我们来看能否 "不妨设 $f'(c) = 0$". 为此, 令 $F(x) = f(x) - f'(c)x$. 则题设条件化为