高等学校教材

数学分析

第三版（上册）

陈纪修 於崇华 金路

高等教育出版社

内容提要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”和教育部“理科基础人才培养基地创建优秀名牌课程数学分析”项目的成果，是面向21世纪课程教材。本书以复旦大学数学科学学院30多年中陆续出版的《数学分析》为基础，为适应数学教学改革的需要而编写的。作者结合了多年来教学实践的经验体会，从体系、内容、观点、方法和处理上，对教材作了有益的改革。本次修订适当补充了数字资源（以图标示意）。

本书分上、下两册出版。

上册内容包括：集合与映射、数列极限、函数极限与连续函数、微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、反常积分八章。

本书可以作为高等学校数学类专业数学分析课程的教科书，也可供其他有关专业选用。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析．上册／陈纪修，於崇华，金路编．--3版．--北京：高等教育出版社，2019.5（2020.12重印）
ISBN 978-7-04-051571-8

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①陈…②於…③金…　Ⅲ．①数学分析-高等学校-教材　Ⅳ．①O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第042781号

项目策划　李艳馥　李　蕊　兰莹莹
策划编辑　李　蕊　责任编辑　张晓丽　封面设计　王凌波　版式设计　杜微言
插图绘制　于　博　责任校对　刘娟娟　责任印制　赵义民

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	北京中科印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	24	版　次	1999年9月第1版
字　数	550千字		2019年5月第3版
购书热线	010-58581118	印　次	2020年12月第4次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	51.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　51571-00

目录

第一章 集合与映射

数学是一门研究数量关系和空间形式的科学，是一个范围广阔、分支众多、应用广泛的科学体系，是其他各门科学（包括自然科学、社会科学、管理科学与技术科学等）的基础和工具，在整个人类知识体系中占有特殊的地位.

数学起源于计数、测量和贸易等活动.17 世纪以来，随着物理学、力学等学科的发展和工业技术的崛起，尤其是 Newton 和 Leibniz 发明微积分这划时代的贡献，数学迅速发展起来，到 19 世纪已成为天体力学、弹性力学、流体力学、热学、电磁学和统计物理学中不可缺少的重要工具.20 世纪以来，数学与自然科学和生产技术的联系达到了新的高度.

20 世纪 70 年代后，随着电子计算机的迅猛发展和普及，数学理论、方法和工具更是以前所未有的广度、深度和速度进入了几乎所有的其他学科.马克思一百多年前的“一切科学，只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步”的著名论断正在逐步成为现实.进入 21 世纪以后，随着高新技术的加速发展，数学在人类知识各个领域中愈加大显身手，在科学舞台上扮演更为令人瞩目的角色.

当今，随着学科内部高度发展交融以及与其他领域（尤其是计算机技术）间空前广泛的渗透，数学已成为一座巍峨的科学大厦.但是，万丈高楼平地起，就研究数量关系和空间形式而言，必须从变量间最本质的联系，即函数开始起步.数学分析正是讲述函数理论的最基本的课程，是几乎所有后继数学课程的奠基石，因此，它理所当然地被列为数学科学最重要的基础课之一，在培养具有良好的数学素养的人才方面，它所起的作用是任何别的课程无法相比的.

历史上，微积分的形成和发展直接得益于物理学、天文学、几何学等领域的研究，因而当微积分一旦形成为一门学科，它在这些应用领域中就极具应用活力.因此，学习数学分析不仅要循序渐进地深刻领会已抽象出来的普遍结论，更要切实掌握用数学工具分析问题、转化问题、解决问题的思想和方法——这是开设本课程的宗旨.

§1 集　　合

集合

面对浩瀚的大千世界，人们总要先把林林总总的客观事物按其某一方面的特性进

行适当划分，再分门别类地加以研究. 所谓的"物以类聚"在某种程度上反映出了人类普遍的思维模式，在各个领域中被广泛使用的**集合**的概念正是这一原则最基本的体现.

集合在数学领域更是具有无可比拟的特殊重要性. 集合论的基础是由德国数学家 Cantor 在 19 世纪 70 年代奠定的，经过一大批卓越的数学家半个世纪的努力，到 20 世纪 20 年代已确立了其在现代数学理论体系中的基础地位，可以说，当今数学各个分支的几乎所有结果都构筑在严格的集合理论上. 所以，学习现代数学，应该由集合入手. 但集合论是一门深奥的理论，需要有专门的课程来讲述，我们下面谈的只是数学分析课程要涉及的有关集合的一些基本概念和问题.

集合又称集，是指具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇集成的总体，这些对象称为该集合的**元素**. 我们通常用大写字母如 $A,B,S,T,\cdots$ 表示集合，而用小写字母如 $a,b,x,y,\cdots$ 表示集合的元素.

若 x 是集合 S 的元素，则称 x 属于 S，记为 $x\in S$. 若 y 不是集合 S 的元素，则称 y 不属于 S，记为 $y \overline{\in} S$ 或 $y\notin S$.

全体正整数的集合，全体整数的集合，全体有理数的集合，全体实数的集合是我们常用的集合，习惯上分别用字母 $\mathbf{N}^+,\mathbf{Z},\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 来表示①.

表示集合的方式通常有两种. 一种是**枚举法**，就是将集合的元素逐一列举出来的方式. 例如，光学中的三基色可以用集合

$$\{红,绿,蓝\}$$

表示，由 a,b,c,d 四个字母组成的集合 A 可用

$$A=\{a,b,c,d\}$$

表示，如此等等.

枚举法还包括尽管集合的元素无法一一列举，但可以将它们的变化规律表示出来的情况. 如正整数集 $\mathbf{N}^+$ 和整数集 $\mathbf{Z}$ 可以分别表示为

$$\mathbf{N}^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

和

$$\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n,\cdots\}.$$

另一种表示集合的方式是**描述法**. 设集合 S 是由具有某种性质 P 的元素全体所构成的，则可以采用描述集合中元素公共属性的方法来表示集合：

$$S=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如，由 2 的平方根组成的集合 B 可表示为

$$B=\{x\mid x^2=2\},$$

而有理数集 $\mathbf{Q}$ 和正实数集 $\mathbf{R}^+$ 则可以分别表示为

$$\mathbf{Q}=\left\{x\ \middle|\ x=\frac{q}{p},\text{其中 }p\in\mathbf{N}^+\text{ 并且 }q\in\mathbf{Z}\right\}$$

和

$$\mathbf{R}^+=\{x\mid x\in\mathbf{R}\text{ 并且 }x>0\}.$$

要注意的是，集合中的元素之间并没有次序关系，也就是说，在集合的表示中，同

① 在国家标准中规定，自然数的集合 $\{0,1,2,\cdots\}$ 用 $\mathbf{N}$ 表示，这里 $\mathbf{N}^+$ 表示正整数的集合.

一元素的重复出现或在不同位置上出现不具有任何特殊意义.例如,$\{a,b\}$、$\{b,a\}$和$\{a,b,a\}$表示的是同一个集合.

有一类特殊的集合,它不包含任何元素,如$\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 并且 $x^2+1=0\}$,我们称之为**空集**,记为$\varnothing$.要注意,空集并不由于其内部空空如也而失去存在价值,如在集合{红,绿,蓝}中选取某些基色进行配色,三种基色都不选显然也同样是一种重要的配色方案,所以,空集具有很实际的意义.

设S,T是两个集合,如果S的所有元集都属于T,即

$$x\in S\quad\Rightarrow\quad x\in T,$$

其中符号"$\Rightarrow$"称为"蕴含",即表示由左边的命题可以推出右边的命题,则称S是T的**子集**,记为$S\subset T$.例如,对于正整数集$\mathbf{N}^+$,整数集$\mathbf{Z}$,有理数集$\mathbf{Q}$与实数集$\mathbf{R}$,成立

$$\mathbf{N}^+\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

显然,对任何集合S,都有$S\subset S$与$\varnothing\subset S$.

如果S中至少存在一个元素x不属于T,即$x\in S$但$x\notin T$,那么S不是T的子集,记为$S\not\subset T$.如

$$\{x\mid x^2-1=0\}\not\subset\mathbf{N}^+.$$

例 1.1.1 设$T=\{a,b,c\}$,则T有如下2^3个子集:

$\varnothing$;

$\{a\},\{b\},\{c\}$;

$\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\}$;

$\{a,b,c\}$.

容易证明,由n个元素组成的集合$T=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$共有2^n个子集.

如果S是T的一个子集,即$S\subset T$,但在T中存在一个元素x不属于S,即$T\not\subset S$,则称S是T的一个**真子集**.在上面所举的集合$T=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的2^n个子集中,有2^n-1个是真子集.

如果两个集合S与T的元素完全相同,则称S与T两集合相等,记为$S=T$.显然我们有

$$S=T\quad\Leftrightarrow\quad S\subset T\ \text{ 并且 }\ T\subset S,$$

其中符号"$\Leftrightarrow$"称为"当且仅当",表示左边的命题与右边的命题相互"蕴含",即两个命题"等价".

在数学分析课程中,最常遇到的实数集的子集是区间:

设$a,b(a<b)$是两个实数,则满足不等式$a<x<b$的所有实数x的集合称为以a,b为端点的开区间,记为

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的所有实数x的集合称为以a,b为端点的闭区间,记为

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

满足不等式$a<x\leqslant b$或$a\leqslant x<b$的所有实数x的集合称为以a,b为端点的半开半闭区间,分别记为

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}\qquad\text{或}\qquad[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}.$$

上述几类区间的长度是有限的,称为有限区间.除此以外,还有下述几类无限区间:

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\};\quad [a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\};\quad (-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\};$$

和

$$(-\infty,+\infty)=\{x|x\text{ 为任意实数}\}(\text{即实数集 }\mathbf{R}).$$

集合运算

集合的基本运算有并、交、差、补四种(如图 1.1.1).

两个集合 S 和 T 的**并**是由 S 和 T 的元素汇集成的集合,记为 $S\cup T$,即:

$$S\cup T=\{x|x\in S\text{ 或者 }x\in T\}.$$

两个集合 S 和 T 的**交**是由 S 和 T 的公共元素组成的集合,记为 $S\cap T$,即:

$$S\cap T=\{x|x\in S\text{ 并且 }x\in T\}.$$

例如,设 $S=\{a,b,c\}$,$T=\{b,c,d,e\}$,则

$$S\cup T=\{a,b,c,d,e\},\quad S\cap T=\{b,c\}.$$

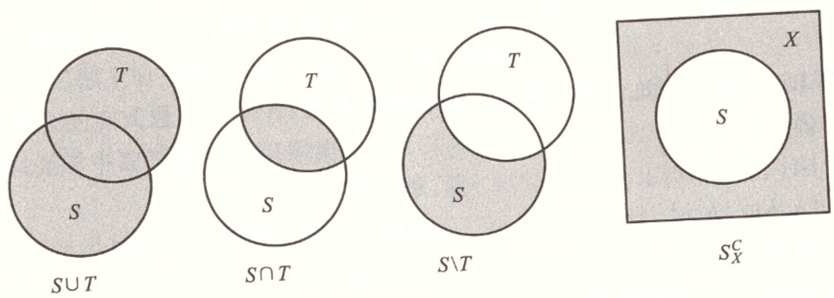

图 1.1.1

集合的并与交运算具有下列一些性质:

1. 交换律 $A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A.$
2. 结合律 $A\cup(B\cup D)=(A\cup B)\cup D,\quad A\cap(B\cap D)=(A\cap B)\cap D.$
3. 分配律 $A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D),\quad A\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup D).$

作为一个例子,我们证明

$$A\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup D).$$

第一步,证明 $A\cup(B\cap D)\subset(A\cup B)\cap(A\cup D)$.

设 $x\in A\cup(B\cap D)$,按照并的定义,或者 $x\in A$,或者 $x\in B\cap D$;再按照交的定义即为:或者 $x\in A$,或者 $x\in B$ 并且 $x\in D$.所以,不管怎么样,总有$x\in A\cup B$ 并且 $x\in A\cup D$,即 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup D)$.于是

$$x\in A\cup(B\cap D)\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup D).$$

第二步,证明$(A\cup B)\cap(A\cup D)\subset A\cup(B\cap D)$.

设 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup D)$,按照交的定义,$x\in A\cup B$ 并且 $x\in A\cup D$;再按照并的定义,或者 $x\in A$,或者 $x\in B$ 并且 $x\in D$,即 $x\in A\cup(B\cap D)$.于是

$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup D)\Rightarrow x\in A\cup(B\cap D).$$

将上述两步结合起来,就得到结论

$$A\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup D).$$