



普通高等教育“十二五”国家级规划教材

高等代数学

(第三版)

姚慕生 吴泉水 谢启鸿 编著



博学·数学系列



复旦大学出版社

www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

高等代数学/姚慕生,吴泉水,谢启鸿编著. —3版. —上海:复旦大学出版社,
2014.10(2020.8重印)
(复旦博学·数学系列)
ISBN 978-7-309-10989-4

I. 高… II. ①姚…②吴…③谢… III. 高等代数-高等学校-教材 IV. 015

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第219395号

高等代数学(第三版)

姚慕生 吴泉水 谢启鸿 编著
责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行

上海市国权路579号 邮编:200433

网址: fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>

门市零售: 86-21-65102580 团体订购: 86-21-65104505

外埠邮购: 86-21-65642846 出版部电话: 86-21-65642845

大丰市科星印刷有限责任公司

开本 787×960 1/16 印张 29.75 字数 522 千

2020年8月第3版第5次印刷

印数 13 401—16 500

ISBN 978-7-309-10989-4/O · 551

定价: 65.00 元

如有印装质量问题, 请向复旦大学出版社有限公司出版部调换。

版权所有 侵权必究

目 录

第一章 行列式	1
§ 1.1 二阶行列式	1
§ 1.2 三阶行列式	7
§ 1.3 n 阶行列式	12
§ 1.4 行列式的展开和转置	21
§ 1.5 行列式的计算	28
§ 1.6 行列式的等价定义	38
* § 1.7 Laplace 定理	44
第二章 矩阵	57
§ 2.1 矩阵的概念	57
§ 2.2 矩阵的运算	60
§ 2.3 方阵的逆阵	71
§ 2.4 矩阵的初等变换与初等矩阵	76
§ 2.5 矩阵乘积的行列式与初等变换法求逆阵	88
§ 2.6 分块矩阵	95
* § 2.7 Cauchy-Binet 公式	105
第三章 线性空间	114
§ 3.1 数域	114
§ 3.2 行向量和列向量	116
§ 3.3 线性空间	120
§ 3.4 向量的线性关系	124
§ 3.5 向量组的秩	130
§ 3.6 矩阵的秩	136
§ 3.7 坐标向量	145
§ 3.8 基变换与过渡矩阵	151
§ 3.9 子空间	157

§ 3.10 线性方程组的解	164
第四章 线性映射	180
§ 4.1 线性映射的概念	180
§ 4.2 线性映射的运算	184
§ 4.3 线性映射与矩阵	188
§ 4.4 线性映射的像与核	196
§ 4.5 不变子空间	202
第五章 多项式	209
§ 5.1 一元多项式代数	209
§ 5.2 整除	211
§ 5.3 最大公因式	215
§ 5.4 因式分解	222
§ 5.5 多项式函数	227
§ 5.6 复系数多项式	230
§ 5.7 实系数多项式和有理系数多项式	235
§ 5.8 多元多项式	240
§ 5.9 对称多项式	244
§ 5.10 结式和判别式	250
第六章 特征值	262
§ 6.1 特征值和特征向量	262
§ 6.2 对角化	270
§ 6.3 极小多项式与 Cayley-Hamilton 定理	278
* § 6.4 特征值的估计	282
第七章 相似标准型	290
§ 7.1 多项式矩阵	290
§ 7.2 矩阵的法式	295
§ 7.3 不变因子	300
§ 7.4 有理标准型	304
§ 7.5 初等因子	308
§ 7.6 Jordan 标准型	311

§ 7.7 Jordan 标准型的进一步讨论和应用	319
* § 7.8 矩阵函数	327
第八章 二次型	337
§ 8.1 二次型的化简与矩阵的合同	337
§ 8.2 二次型的化简	342
§ 8.3 惯性定理	348
§ 8.4 正定型与正定矩阵	352
* § 8.5 Hermite 型	357
第九章 内积空间	363
§ 9.1 内积空间的概念	363
§ 9.2 内积的表示和正交基	369
§ 9.3 伴随	377
§ 9.4 内积空间的同构, 正交变换和酉变换	380
§ 9.5 自伴随算子	389
§ 9.6 复正规算子	396
* § 9.7 实正规矩阵	400
* § 9.8 谱	407
* § 9.9 奇异值分解	414
* § 9.10 最小二乘解	420
* 第十章 双线性型	431
§ 10.1 对偶空间	431
§ 10.2 双线性型	436
§ 10.3 纯量积	442
§ 10.4 交错型与辛空间	447
§ 10.5 对称型与正交几何	451
参考文献	456
索引	457

第一章 行列式

§ 1.1 二阶行列式

我们在中学里曾经学过如何解二元一次方程组和三元一次方程组. 在许多实际问题中, 我们还会遇到未知数更多的一次方程组, 通常称之为线性方程组. 一般来说, 具有下列形状的方程组我们称为 n 元线性方程组的标准式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

其中 a_{ij}, b_i ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 都是常数, x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 是未知数, 方程组中所有未知数都是一次的. 注意在一般的线性方程组中, m 和 n 可以不相等, 即方程组中未知数个数和方程式个数可以不等. 凡是经过有限次移项、合并同类项可以变为 (1.1.1) 式形状的方程组都称为线性方程组. 求解线性方程组是线性代数的一个重要任务, 我们在这一章中主要讨论当 $m = n$, 即方程式个数等于未知数个数时如何来解上述线性方程组.

我们首先回忆一下中学里学过的解二元一次方程组的方法. 先看一个简单的例子.

例 1.1.1 求解二元一次方程组:

$$\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 3x + 2y = 11. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

解 用代入消去法, 在第一个方程式中解出 y 用 x 表示的式子:

$$y = 2x - 5.$$

代入第二个方程式中得到

$$3x + 2(2x - 5) = 11.$$

整理后得

$$7x = 21.$$

解得 $x = 3$, 代入 $y = 2x - 5$ 求得 $y = 1$. 于是上述线性方程组有唯一组解:

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$$

读者不难想象这种方法也可用来解一般的线性方程组. 比如对一个含 10 个未知数的方程组, 利用一个方程式将第一个未知数用其他 9 个未知数表示出来以后分别代入其余方程式, 于是原来的方程组就化为只含有 9 个未知数的方程组了. 再用同样的方法可以得到一个只含 8 个未知数的方程组, 等等. 一直做到只含 1 个未知数. 解出这个一元一次方程式并返回去求所有其他未知数. 这个办法在理论上似乎是可行的, 但是当未知数个数很多时 (在许多实际问题中, 未知数的个数可能有成千上万个), 运算将变得难以想象的复杂. 另外, 用代入法无法得出一个规范化的公式, 这对于从理论上分析线性方程组的解不能不说是个很大的缺陷. 我们现在希望给出线性方程组解的一个公式. 这样的公式真的存在吗? 我们首先来考察二元一次方程组的解, 设有二元一次方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1.1.3)$$

用 a_{22} 乘第一式的两边, 用 $-a_{12}$ 乘第二式的两边得:

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -b_2a_{12}. \end{cases}$$

将这两个方程式两边相加得:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

于是

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

用类似的办法消去 x_1 , 解得:

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

我们注意到二元一次方程组的两个解都可以表示为分数的形状, 其中分母仅和未知数的系数有关. 二元一次方程组解的公式是有了, 但是这个公式不太好记忆.

如果我们引进二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

则上述解可用行列式表示:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (1.1.4)$$

在用行列式表示的解公式 (1.1.4) 中, 我们发现解的表达有一定的规律:

(1) x_1 与 x_2 的分母都是行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, 即只需将原方程组未知数前的系数按原顺序排成一个行列式即可.

(2) x_1 的分子行列式的第一列是原方程组的常数列, 第二列由 x_2 的系数组成, 因此这个行列式可以看成是将 x_1 与 x_2 的分母行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中的第一列换成常数项而得. 这个规则对 x_2 的分子行列式也适用.

显而易见, 这样的解的公式一目了然而且很容易记忆. 我们自然希望用同样的公式来表示三元一次方程组的解乃至 n 元线性方程组的解. 在做这件事之前, 我们先来研究二阶行列式的性质, 这将启发我们如何定义一般的 n 阶行列式.

设有二阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$|A|$ 的值根据定义为 $a_{11}a_{22}$. 我们称上述行列式为上三角行列式, 元素 a_{11}, a_{22} 为行列式的对角线元素 (或主对角元素), 于是我们得到行列式的第一个性质.

性质 1 上三角行列式的值等于其对角线元素之积.

性质 2 行列式某行或某列全为零, 则行列式值等于零.

比如若第一行全为零, 则显然

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

其他几种情形也类似可验证.

性质 3 用常数 c 乘以行列式的某一行或某一列, 得到的行列式的值等于原行列式值的 c 倍.

比如将 c 乘以 $|A|$ 的第一行, 我们有

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (ca_{11})a_{22} - (ca_{12})a_{21} = c|A|.$$

其他几种情形读者可自己验证.

性质 4 交换行列式不同的两行 (列), 行列式的值改变符号.

证明也很容易:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

同理

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

性质 5 若行列式两行或两列成比例, 则行列式的值等于零. 特别, 若行列式两行或两列相同, 则行列式的值等于零.

对列成比例的情形我们可证明如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{21} & ka_{21} \end{vmatrix} = a_{11}ka_{21} - ka_{11}a_{21} = 0.$$

同理可证明行成比例的情形.

性质 6 若行列式中某行 (列) 元素均为两项之和, 则行列式可表示为两个行列式之和.

如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} + c_{11} & a_{12} \\ b_{21} + c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

验证也非常容易, 只需按照行列式定义计算等式两边的值即可. 需要注意的是下面的等式不成立:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$