普通高等教育“十二五”国家级规划教材

高等代数学

（第三版）

姚慕生 吴泉水 谢启鸿 编著

博学 · 数学系列

復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

高等代数学/姚慕生,吴泉水,谢启鸿编著.—3版.—上海:复旦大学出版社,2014.10(2020.8重印)
(复旦博学·数学系列)
ISBN 978-7-309-10989-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①姚…②吴…③谢… Ⅲ.高等代数-高等学校-教材 Ⅳ.015

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第219395号

高等代数学(第三版)
姚慕生 吴泉水 谢启鸿 编著
责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路579号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65102580 团体订购:86-21-65104505
外埠邮购:86-21-65642846 出版部电话:86-21-65642845
大丰市科星印刷有限责任公司

开本787×960 1/16 印张29.75 字数522千
2020年8月第3版第5次印刷
印数13 401—16 500

ISBN 978-7-309-10989-4/O·551
定价:65.00元

目　　录

第一章 行 列 式

§1.1 二阶行列式

我们在中学里曾经学过如何解二元一次方程组和三元一次方程组. 在许多实际问题中, 我们还会遇到未知数更多的一次方程组, 通常称之为线性方程组. 一般来说, 具有下列形状的方程组我们称为 n 元线性方程组的标准式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 a_{ij}, b_i $(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 都是常数, $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是未知数, 方程组中所有未知数都是一次的. 注意在一般的线性方程组中, m 和 n 可以不相等, 即方程组中未知数个数和方程式个数可以不等. 凡是经过有限次移项、合并同类项可以变为 (1.1.1) 式形状的方程组都称为线性方程组. 求解线性方程组是线性代数的一个重要任务, 我们在这一章中主要讨论当 $m = n$, 即方程式个数等于未知数个数时如何来解上述线性方程组.

我们首先回忆一下中学里学过的解二元一次方程组的方法. 先看一个简单的例子.

例 1.1.1 求解二元一次方程组:

$$\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 3x + 2y = 11. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

解 用代入消去法, 在第一个方程式中解出 y 用 x 表示的式子:

$$y = 2x - 5.$$

代入第二个方程式中得到

$$3x + 2(2x - 5) = 11.$$

整理后得

$$7x = 21.$$

解得 $x=3$, 代入 $y=2x-5$ 求得 $y=1$. 于是上述线性方程组有唯一组解:

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$$

读者不难想象这种方法也可用来解一般的线性方程组. 比如对一个含 10 个未知数的方程组, 利用一个方程式将第一个未知数用其他 9 个未知数表示出来以后分别代入其余方程式, 于是原来的方程组就化为只含有 9 个未知数的方程组了. 再用同样的方法可以得到一个只含 8 个未知数的方程组, 等等. 一直做到只含 1 个未知数. 解出这个一元一次方程式并返回去求所有其他未知数. 这个办法在理论上似乎是可行的, 但是当未知数个数很多时 (在许多实际问题中, 未知数的个数可能有成千上万个), 运算将变得难以想象的复杂. 另外, 用代入法无法得出一个规范化的公式, 这对于从理论上分析线性方程组的解不能不说是个很大的缺陷. 我们现在希望给出线性方程组解的一个公式. 这样的公式真的存在吗? 我们首先来考察二元一次方程组的解, 设有二元一次方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

用 a_{22} 乘第一式的两边, 用 $-a_{12}$ 乘第二式的两边得:

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -b_2a_{12}. \end{cases}$$

将这两个方程式两边相加得:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

于是

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

用类似的办法消去 x_1, 解得:

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

我们注意到二元一次方程组的两个解都可以表示为分数的形状, 其中分母仅和未知数的系数有关. 二元一次方程组解的公式是有了, 但是这个公式不太好记忆.

如果我们引进二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

则上述解可用行列式表示:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.1.4}$$

在用行列式表示的解公式 (1.1.4) 中, 我们发现解的表达有一定的规律:

(1) x_1 与 x_2 的分母都是行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, 即只需将原方程组未知数前的系数按原顺序排成一个行列式即可.

(2) x_1 的分子行列式的第一列是原方程组的常数列, 第二列由 x_2 的系数组成, 因此这个行列式可以看成是将 x_1 与 x_2 的分母行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中的第一列换成常数项而得. 这个规则对 x_2 的分子行列式也适用.

显而易见, 这样的解的公式一目了然而且很容易记忆. 我们自然希望用同样的公式来表示三元一次方程组的解乃至 n 元线性方程组的解. 在做这件事之前, 我们先来研究二阶行列式的性质, 这将启发我们如何定义一般的 n 阶行列式.

设有二阶行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$|\boldsymbol{A}|$ 的值根据定义为 $a_{11}a_{22}$. 我们称上述行列式为上三角行列式, 元素 a_{11}, a_{22} 为行列式的对角线元素 (或主对角元素), 于是我们得到行列式的第一个性质.

性质 1 上三角行列式的值等于其对角线元素之积.

性质 2 行列式某行或某列全为零, 则行列式值等于零.

比如若第一行全为零, 则显然

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

其他几种情形也类似可验证.

性质 3 用常数 c 乘以行列式的某一行或某一列, 得到的行列式的值等于原行列式值的 c 倍.

比如将 c 乘以 $|\boldsymbol{A}|$ 的第一行, 我们有

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (ca_{11})a_{22} - (ca_{12})a_{21} = c|\boldsymbol{A}|.$$

其他几种情形读者可自己验证.

性质 4 交换行列式不同的两行 (列), 行列式的值改变符号.

证明也很容易:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

同理

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

性质 5 若行列式两行或两列成比例, 则行列式的值等于零. 特别, 若行列式两行或两列相同, 则行列式的值等于零.

对列成比例的情形我们可证明如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{21} & ka_{21} \end{vmatrix} = a_{11}ka_{21} - ka_{11}a_{21} = 0.$$

同理可证明行成比例的情形.

性质 6 若行列式中某行 (列) 元素均为两项之和, 则行列式可表示为两个行列式之和.

如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & a_{12} \\ b_{21}+c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

验证也非常容易, 只需按照行列式定义计算等式两边的值即可. 需要注意的是下面的等式不成立:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$