高等学校教材

数学分析

第三版（下册）

陈纪修 於崇华 金路

高等教育出版社

内容提要

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"和教育部"理科基础人才培养基地创建优秀名牌课程数学分析"项目的成果，是面向21世纪课程教材。本书以复旦大学数学科学学院30多年中陆续出版的《数学分析》为基础，为适应数学教学改革的需要而编写的。作者结合了多年来教学实践的经验体会，从体系、内容、观点、方法和处理上，对教材作了有益的改革。本次修订适当补充了数字资源（以图标示意）。

本书分上、下两册出版。

下册内容包括：数项级数、函数项级数、Euclid空间上的极限和连续、多元函数的微分学、重积分、曲线积分、曲面积分与场论、含参变量积分、Fourier级数八章。

本书可以作为高等学校数学类专业数学分析课程的教科书，也可供其他有关专业选用。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析．下册／陈纪修，於崇华，金路编．--3版．--北京：高等教育出版社，2019.5
ISBN 978-7-04-051630-2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①陈… ②於… ③金… Ⅲ.①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第051910号

项目策划 李艳馥 李 蕊 兰莹莹
策划编辑 李 蕊 责任编辑 于丽娜 特约编辑 高 旭 封面设计 王凌波
版式设计 杜微言 插图绘制 于 博 责任校对 王 雨 责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京中科印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 27.75
字 数 600千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版 次 1999年9月第1版
2019年5月第3版
印 次 2019年5月第1次印刷
定 价 54.00元

物 料 号 51630-00

免，恳请广大

宀

复旦园

目录

第九章 数项级数

早在大约公元前450年,古希腊有一位名叫Zeno的学者,曾提出若干个在数学发展史上产生过重大影响的悖论,“Achilles(希腊神话中的英雄)追赶乌龟”即是其中较为著名的一个.

设乌龟在Achilles前面S_1(米)处向前爬行,Achilles在后面追赶,当Achilles用了t_1(秒)时间,跑完S_1(米)时,乌龟已向前爬了S_2(米);当Achilles再用t_2(秒)时间,跑完S_2(米)时,乌龟又向前爬了S_3(米)……这样的过程可以一直继续下去,因此Achilles永远也追不上乌龟.

显然,这一结论完全有悖于常识,是绝对荒谬的.没有人会怀疑,Achilles必将在T(秒)时间内,跑了S(米)后追上乌龟(T和S是常数).Zeno的诡辩之处就在于把有限的时间T(或距离S)分割成无穷段$t_1,t_2,\cdots$(或$S_1,S_2,\cdots$),然后一段一段地加以叙述,从而造成一种假象:这样“追-爬-追-爬”的过程将随时间的流逝而永无止境.事实上,如果将用掉的时间$t_1,t_2,\cdots$(或跑过的距离$S_1,S_2,\cdots$)加起来,即

$$t_1+t_2+\cdots+t_n+\cdots \quad (\text{或 } S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots),$$

尽管相加的项有无限个,但它们的和却是有限数T(或S).换言之,经过时间T(秒),Achilles跑完S(米)后,他已经追上乌龟了.

这里,我们遇到了无限个数相加的问题.很自然地,我们要问,这种“无限个数相加”是否一定有意义?若不一定的话,那么怎么来判别?有限个数相加时的一些运算法则,如加法交换律、加法结合律对于无限个数相加是否继续有效?如此等等.这正是本章要讨论的数项级数的一些概念.

§1 数项级数的收敛性

数项级数

设$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$是无穷可列个实数,我们称它们的“和”

$$x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots$$

为**无穷数项级数**(简称**级数**),记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$,其中$x_n$称为级数的**通项**或**一般项**.

当然,我们无法直接对无穷多个实数逐一地进行加法运算,所以必须对上述的级

数求和给出合理的定义.为此作级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的"**部分和数列**"$\{S_n\}$：

$$S_1 = x_1,$$
$$S_2 = x_1 + x_2,$$
$$S_3 = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

定义 9.1.1　如果部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于有限数 S，则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，且称它的和为 S，记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n;$$

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

由上述定义可知，只有当无穷级数收敛时，无穷多个实数的加法才是有意义的，并且它们的和就是级数的部分和数列的极限.所以，级数的收敛与数列的收敛本质上是一回事.

例 9.1.1　设 $|q|<1$，则几何级数(即等比级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

是收敛的.这是因为它的部分和数列的通项为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

显然，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

现在我们来回答本章开头提出的 Achilles 追赶乌龟的问题.

设乌龟的速度 v_1(m/s)与 Achilles 的速度 v_2(m/s)之比为 $q=\frac{v_1}{v_2}$，$0<q<1$.Achilles 在乌龟后面 S_1(m)处开始追赶乌龟.当 Achilles 跑完 S_1(m)时，乌龟已向前爬了 $S_2 = qS_1$(m)；当 Achilles 继续跑完 S_2(m)时，乌龟又向前爬了 $S_3 = q^2 S_1$(m)……当 Achilles 继续跑完 S_n(m)时，乌龟又向前爬了 $S_{n+1} = q^n S_1$(m)……显然 Achilles 要追赶上乌龟，必须跑完上述无限段路程 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$，由于

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots = S_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots) = \frac{S_1}{1-q},$$

即我们在前面所说的，这无限段路程的和却是有限的，也就是说，当 Achilles 跑完路程 $S=\frac{S_1}{1-q}$ (m)(即经过了时间 $T=\frac{S_1}{(1-q)v_2}$ (s))时，他已经追上了乌龟.

例 9.1.2 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

是发散的.这是因为它的部分和数列的通项为

$$S_n=\begin{cases}0, n \text{ 为偶数},\\ 1, n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

显然$\{S_n\}$是发散的.

例 9.1.3 由第二章的例 2.4.7 可以知道,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \quad (p>0)$$

当$p>1$时收敛;当$0<p\leqslant 1$时发散到正无穷大.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$称为 p **级数**($p=1$ 时又称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$为**调和级数**),它在判别其他级数的敛散情况时有重要作用.

当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛时,我们还可以构作它的“**余和数列**”$\{r_n\}$,其中

$$r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}x_k=x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots,$$

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=S$,则$r_n=S-S_n$,显然,这时$\{r_n\}$收敛于 0.

级数的基本性质

可以由数列的性质平行地导出级数的一些性质.

定理 9.1.1(级数收敛的必要条件) 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛,则其通项所构成的数列$\{x_n\}$是无穷小量,即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

证 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=S$,则对$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$,成立

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S,$$

于是得到

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0.$$

证毕

定理 9.1.1 可以用来判断某些级数发散.例如,当$|q|\geqslant 1$时$\{q^n\}$不是无穷小量,因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$发散.例 9.1.2 中$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$的一般项为$\pm 1$,所以也发散.

要注意的是,定理 9.1.1 只是级数收敛的必要条件,而非充分条件.换言之,数列$\{x_n\}$为无穷小量并不能保证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛.例如,虽然数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是无穷小量,但级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 却是发散的.

定理 9.1.2(线性性) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=B$, α,β 是两个常数,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha A+\beta B.$$

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列为 $\{S_n^{(1)}\}$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和数列为 $\{S_n^{(2)}\}$, 则对 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有

$$S_n=\alpha S_n^{(1)}+\beta S_n^{(2)},$$

于是成立

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha\lim_{n\to\infty}S_n^{(1)}+\beta\lim_{n\to\infty}S_n^{(2)}=\alpha A+\beta B.$$

证毕

定理 9.1.2 说明,对收敛级数可以进行加法和数乘运算.

例 9.1.4 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n}$ 的值.

解 因为几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ 都收敛,所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n}=\frac{16}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n-\frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=\frac{16}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{5}}-\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{5}}=14.$$

定理 9.1.3 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛,则在它的求和表达式中任意添加括号后所得的级数仍然收敛,且其和不变.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 添加括号后表示为

$$(x_1+x_2+\cdots+x_{n_1})+(x_{n_1+1}+x_{n_1+2}+\cdots+x_{n_2})+\cdots+(x_{n_{k-1}+1}+x_{n_{k-1}+2}+\cdots+x_{n_k})+\cdots,$$

令

$$\begin{aligned}
&y_1=x_1+x_2+\cdots+x_{n_1},\\
&y_2=x_{n_1+1}+x_{n_1+2}+\cdots+x_{n_2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_k=x_{n_{k-1}+1}+x_{n_{k-1}+2}+\cdots+x_{n_k},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 按上面方式添加括号后所得的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$. 令 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 的部分和数列为 $\{U_n\}$, 则