

高等学校教材

数学分析

第三版（下册）

陈纪修 於崇华 金路

高等教育出版社

内容提要

本书是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”和教育部“理科基础人才培养基地创建优秀名牌课程数学分析”项目的成果,是面向 21 世纪课程教材。本书以复旦大学数学科学学院 30 多年中陆续出版的《数学分析》为基础,为适应数学教学改革的需要而编写的。作者结合了许多年来教学实践的经验体会,从体系、内容、观点、方法和处理上,对教材作了有益的改革。本次修订适当补充了数字资源(以图标示意)。

本书分上、下两册出版。

下册内容包括:数项级数、函数项级数、Euclid 空间上的极限和连续、多元函数的微分学、重积分、曲线积分、曲面积分与场论、含参变量积分、Fourier 级数八章。

本书可以作为高等学校数学类专业数学分析课程的教科书,也可供其他有关专业选用。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析.下册 / 陈纪修, 於崇华, 金路编. -- 3
版. -- 北京: 高等教育出版社, 2019.5
ISBN 978-7-04-051630-2

I. ①数… II. ①陈… ②於… ③金… III. ①数学分
析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 051910 号

项目策划 李艳馥 李蕊 兰莹莹

策划编辑 李蕊

责任编辑 于丽娜

特约编辑 高旭

封面设计 王凌波

版式设计 杜微言

插图绘制 于博

责任校对 王雨

责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印刷 北京中科印刷有限公司
开本 787mm×1092mm 1/16
印张 27.75
字数 600 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 1999 年 9 月第 1 版
2019 年 5 月第 3 版
印 次 2019 年 5 月第 1 次印刷
定 价 54.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 51630-00

免, 恳请广大

f
= 复旦园

目录

第九章 数项级数 1

§ 1 数项级数的收敛性 1

 数项级数 1

 级数的基本性质 3

 习题 7

§ 2 上极限与下极限 7

 数列的上极限和下极限 7

 上极限和下极限的运算 10

 习题 14

§ 3 正项级数 14

 正项级数 14

 比较判别法 15

 Cauchy 判别法与 d' Alembert 判别法 17

 Raabe 判别法 20

 积分判别法 21

 习题 24

§ 4 任意项级数 26

 任意项级数 26

 Leibniz 级数 26

 Abel 判别法与 Dirichlet 判别法 27

 级数的绝对收敛与条件收敛 30

 加法交换律 32

 级数的乘法 35

 习题 38

§ 5 无穷乘积 40

 无穷乘积的定义 40

 无穷乘积与无穷级数 42

 习题 47

第十章 函数项级数 49

§ 1 函数项级数的一致收敛性 49

 点态收敛 49

函数项级数(或函数序列)的基本问题	50
函数项级数(或函数序列)的一致收敛性	53
习题	60
§ 2 一致收敛级数的判别与性质	61
一致收敛的判别	61
一致收敛级数的性质	65
处处不可导的连续函数之例	71
习题	72
§ 3 幂级数	74
幂级数的收敛半径	74
幂级数的性质	76
习题	81
§ 4 函数的幂级数展开	83
Taylor 级数与余项公式	83
初等函数的 Taylor 展开	86
习题	93
§ 5 用多项式逼近连续函数	94
习题	96
第十一章 Euclid 空间上的极限和连续	98
§ 1 Euclid 空间上的基本定理	98
Euclid 空间上的距离与极限	98
开集与闭集	100
Euclid 空间上的基本定理	103
紧集	104
习题	106
§ 2 多元连续函数	107
多元函数	107
多元函数的极限	108
累次极限	109
多元函数的连续性	110
向量值函数	112
习题	114
§ 3 连续函数的性质	115
紧集上的连续映射	115
连通集与连通集上的连续映射	117
习题	118
第十二章 多元函数的微分学	120
§ 1 偏导数与全微分	120
偏导数	120

..... 50	方向导数	122
..... 53	全微分	123
..... 60	梯度	127
..... 61	高阶偏导数	128
..... 61	高阶微分	131
..... 65	向量值函数的导数	132
..... 71	习题	135
..... 72	§ 2 多元复合函数的求导法则	137
..... 74	链式法则	137
..... 74	一阶全微分的形式不变性	143
..... 76	习题	144
..... 81	§ 3 中值定理和 Taylor 公式	146
..... 83	中值定理	146
..... 83	Taylor 公式	148
..... 86	习题	151
..... 93	§ 4 隐函数	151
..... 94	单个方程的情形	152
..... 96	多个方程的情形	157
..... 98	逆映射定理	163
..... 98	习题	165
..... 98	§ 5 偏导数在几何中的应用	167
..... 100	空间曲线的切线和法平面	167
..... 103	曲面的切平面与法线	172
..... 104	习题	177
..... 106	§ 6 无条件极值	178
..... 107	无条件极值	178
..... 107	函数的最值	182
..... 108	最小二乘法	185
..... 109	"牧童"经济模型	187
..... 110	习题	189
..... 112	计算实习题	190
..... 114	§ 7 条件极值问题与 Lagrange 乘数法	191
..... 115	Lagrange 乘数法	191
..... 115	一个最优价格模型	199
..... 117	习题	201
..... 118	第十三章 重积分	203
..... 120	§ 1 有界闭区域上的重积分	203
..... 120	面积	203
..... 120	二重积分的概念	205

§1 多重积分	207
§1 Peano 曲线	208
§1 习题	209
§2 重积分的性质与计算	210
§2 重积分的性质	210
§2 矩形区域上的重积分计算	211
§2 一般区域上的重积分计算	214
§2 习题	217
§3 重积分的变量代换	219
§3 曲线坐标	219
§3 二重积分的变量代换	220
§3 变量代换公式的证明	224
§3 n 重积分的变量代换	228
§3 均匀球体的引力场模型	232
§3 习题	233
§4 反常重积分	235
§4 无界区域上的反常重积分	235
§4 无界函数的反常重积分	240
§4 习题	243
§5 微分形式	244
§5 有向面积与向量的外积	244
§5 微分形式	245
§5 微分形式的外积	247
§5 习题	250
第十四章 曲线积分、曲面积分与场论	251
§1 第一类曲线积分与第一类曲面积分	251
§1 第一类曲线积分	251
§1 曲面的面积	254
§1 Schwarz 的例子	258
§1 第一类曲面积分	260
§1 通讯卫星的电波覆盖的地球面积	262
§1 习题	263
§2 第二类曲线积分与第二类曲面积分	265
§2 第二类曲线积分	265
§2 曲面的侧	269
§2 第二类曲面积分	271
§2 习题	275
§3 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式	276
§3 Green 公式	276

..... 207	曲线积分与路径无关的条件	280
..... 208	Gauss 公式	284
..... 209	Stokes 公式	286
..... 210	习题	289
..... 210	§ 4 微分形式的外微分	292
..... 211	外微分	292
..... 214	外微分的应用	294
..... 217	习题	296
..... 219	§ 5 场论初步	296
..... 219	梯度	296
..... 220	通量与散度	297
..... 224	向量线	299
..... 228	环量与旋度	300
..... 232	Hamilton 算子	303
..... 233	保守场与势函数	305
..... 235	均匀带电直线的电场模型	307
..... 235	热传导模型	309
..... 240	习题	310
..... 243	第十五章 含参变量积分	313
..... 244	§ 1 含参变量的常义积分	313
..... 244	含参变量常义积分的定义	313
..... 245	含参变量常义积分的分析性质	314
..... 247	习题	317
..... 250	§ 2 含参变量的反常积分	318
..... 251	含参变量反常积分的一致收敛	318
..... 251	一致收敛的判别法	320
..... 251	一致收敛积分的分析性质	324
..... 254	习题	329
..... 258	§ 3 Euler 积分	330
..... 260	Beta 函数	330
..... 262	Gamma 函数	332
..... 263	Beta 函数与 Gamma 函数的关系	334
..... 265	习题	340
..... 265	第十六章 Fourier 级数	342
..... 269	§ 1 函数的 Fourier 级数展开	342
..... 271	周期为 2π 的函数的 Fourier 展开	343
..... 275	正弦级数和余弦级数	345
..... 276	任意周期的函数的 Fourier 展开	347
..... 276	习题	348

§ 2	Fourier 级数的收敛判别法	349
	Dirichlet 积分	349
	Riemann 引理及其推论	351
	Fourier 级数的收敛判别法	353
	习题	358
§ 3	Fourier 级数的性质	359
	Fourier 级数的分析性质	359
	Fourier 级数的逼近性质	361
	等周问题	364
	习题	366
§ 4	Fourier 变换和 Fourier 积分	367
	Fourier 变换及其逆变换	367
	Fourier 变换的性质	371
	卷积	373
	习题	374
§ 5	快速 Fourier 变换	375
	离散 Fourier 变换	375
	快速 Fourier 变换	377
	习题	380
	计算实习题	380
	部分习题答案与提示	381
	索引	415

第九章 数项级数

早在大约公元前 450 年,古希腊有一位名叫 Zeno 的学者,曾提出若干个在数学发展史上产生过重大影响的悖论,“Achilles(希腊神话中的英雄)追赶乌龟”即是其中较为著名的一个.

设乌龟在 Achilles 前面 S_1 (米)处向前爬行,Achilles 在后面追赶,当 Achilles 用了 t_1 (秒)时间,跑完 S_1 (米)时,乌龟已向前爬了 S_2 (米);当 Achilles 再用 t_2 (秒)时间,跑完 S_2 (米)时,乌龟又向前爬了 S_3 (米)……这样的过程可以一直继续下去,因此 Achilles 永远也追不上乌龟.

显然,这一结论完全有悖于常识,是绝对荒谬的.没有人会怀疑,Achilles 必将在 T (秒)时间内,跑了 S (米)后追上乌龟(T 和 S 是常数).Zeno 的诡辩之处就在于把有限的时间 T (或距离 S)分割成无穷段 $t_1, t_2, \dots$ (或 $S_1, S_2, \dots$),然后一段一段地加以叙述,从而造成一种假象:这样“追-爬-追-爬”的过程将随时间的流逝而永无止境.事实上,如果将用掉的时间 $t_1, t_2, \dots$ (或跑过的距离 $S_1, S_2, \dots$)加起来,即

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n + \dots \quad (\text{或 } S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots),$$

尽管相加的项有无限个,但它们的和却是有限数 T (或 S).换言之,经过时间 T (秒),Achilles 跑完 S (米)后,他已经追上乌龟了.

这里,我们遇到了无限个数相加的问题.很自然地,我们要问,这种“无限个数相加”是否一定有意义?若不一定的话,那么怎么来判别?有限个数相加时的一些运算法则,如加法交换律、加法结合律对于无限个数相加是否继续有效?如此等等.这正是本章要讨论的数项级数的一些概念.

§ 1 数项级数的收敛性

数项级数

设 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 是无穷可列个实数,我们称它们的“和”

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$$

为无穷数项级数(简称级数),记为 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, 其中 x_n 称为级数的通项或一般项.

当然,我们无法直接对无穷多个实数逐一地进行加法运算,所以必须对上述的级

数求和给出合理的定义.为此作级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的“部分和数列” $\{S_n\}$:

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1, \\ S_2 &= x_1 + x_2, \\ S_3 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

定义 9.1.1 如果部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于有限数 S , 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 且称它的和为 S , 记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n;$$

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 发散, 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

由上述定义可知, 只有当无穷级数收敛时, 无穷多个实数的加法才是有意义的, 并且它们的和就是级数的部分和数列的极限. 所以, 级数的收敛与数列的收敛本质上是一回事.

例 9.1.1 设 $|q| < 1$, 则几何级数 (即等比级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

是收敛的. 这是因为它的部分和数列的通项为

$$S_n = \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

显然,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}.$$

现在我们来回答本章开头提出的 Achilles 追赶乌龟的问题.

设乌龟的速度 v_1 (m/s) 与 Achilles 的速度 v_2 (m/s) 之比为 $q = \frac{v_1}{v_2}$, $0 < q < 1$. Achilles 在乌龟后面 S_1 (m) 处开始追赶乌龟. 当 Achilles 跑完 S_1 (m) 时, 乌龟已向前爬了 $S_2 = qS_1$ (m); 当 Achilles 继续跑完 S_2 (m) 时, 乌龟又向前爬了 $S_3 = q^2 S_1$ (m) $\dots\dots$ 当 Achilles 继续跑完 S_n (m) 时, 乌龟又向前爬了 $S_{n+1} = q^n S_1$ (m) $\dots\dots$ 显然 Achilles 要追赶上乌龟, 必须跑完上述无限段路程 $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$, 由于

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = S_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots) = \frac{S_1}{1 - q},$$

即我们在前面所说的, 这无限段路程的和却是有限的, 也就是说, 当 Achilles 跑完路程

$$S = \frac{S_1}{1 - q} \text{ (m)} \text{ (即经过了时间 } T = \frac{S_1}{(1 - q)v_2} \text{ (s)) 时, 他已经追上了乌龟.}$$

例 9.1.2 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

是发散的. 这是因为它的部分和数列的通项为

$$S_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ 1, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

显然 $\{S_n\}$ 是发散的.

例 9.1.3 由第二章的例 2.4.7 可以知道, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \quad (p > 0)$$

当 $p > 1$ 时收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时发散到正无穷大.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 称为 p 级数 ($p = 1$ 时又称 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 为调和级数), 它在判别其他级数的敛散情况时有重要作用.

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛时, 我们还可以构造它的“余和数列” $\{r_n\}$, 其中

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots,$$

设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$, 则 $r_n = S - S_n$, 显然, 这时 $\{r_n\}$ 收敛于 0.

级数的基本性质

可以由数列的性质平行地导出级数的一些性质.

定理 9.1.1 (级数收敛的必要条件) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 则其通项所构成的数列 $\{x_n\}$ 是无穷小量, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$, 则对 $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$, 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S,$$

于是得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0.$$

证毕

定理 9.1.1 可以用来判断某些级数发散. 例如, 当 $|q| \geq 1$ 时 $\{q^n\}$ 不是无穷小量, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 发散. 例 9.1.2 中 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 的一般项为 ± 1 , 所以也发散.

要注意的是, 定理 9.1.1 只是级数收敛的必要条件, 而非充分条件. 换言之, 数列 $\{x_n\}$ 为无穷小量并不能保证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛. 例如, 虽然数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是无穷小量, 但级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 却是发散的.

定理 9.1.2 (线性性) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B, \alpha, \beta$ 是两个常数, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B.$$

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 $\{S_n^{(1)}\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列为 $\{S_n^{(2)}\}$, 则对

$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有

$$S_n = \alpha S_n^{(1)} + \beta S_n^{(2)},$$

于是成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)} + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(2)} = \alpha A + \beta B.$$

证毕

定理 9.1.2 说明, 对收敛级数可以进行加法和数乘运算.

例 9.1.4 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1} - 3 \cdot 2^n}{5^n}$ 的值.

解 因为几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ 都收敛, 所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1} - 3 \cdot 2^n}{5^n} = \frac{16}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{6}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{16}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{5}} - \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = 14.$$

定理 9.1.3 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 则在它的求和表达式中任意添加括号后所得的级数仍然收敛, 且其和不变.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 添加括号后表示为

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_1}) + (x_{n_1+1} + x_{n_1+2} + \cdots + x_{n_2}) + \cdots + (x_{n_{k-1}+1} + x_{n_{k-1}+2} + \cdots + x_{n_k}) + \cdots,$$

令

$$y_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_1},$$

$$y_2 = x_{n_1+1} + x_{n_1+2} + \cdots + x_{n_2},$$

.....

$$y_k = x_{n_{k-1}+1} + x_{n_{k-1}+2} + \cdots + x_{n_k},$$

.....

则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 按上面方式添加括号后所得的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. 令 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$,

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 的部分和数列为 $\{U_n\}$, 则