

A CONCISE COURSE
IN DIFFERENTIAL GEOMETRY

微分几何

简明教程

嵇庆春 编著



科学出版社

内 容 简 介

本书以较小的篇幅介绍微分几何的基本概念和经典结果,着重解释引入几何概念的动机以及从局部微分几何到整体微分几何的自然过渡.除了强调微分几何的观点和方法之外,我们也注重介绍微分几何中的微分方程和复分析工具.作为微分几何的应用,我们将在本书的最后一章用微分几何方法证明紧曲面三角剖分的存在性.

本书的读者对象为数学专业的本科生以及希望快速了解微分几何的基本观点和方法的相关领域科研人员,所需的基础知识包括:数学分析、高等代数和初步的微分方程、复分析、拓扑学.

图书在版编目(CIP)数据

微分几何简明教程/嵇庆春编著. —北京:科学出版社, 2021.7
ISBN 978-7-03-069366-2

I. ①微… II. ①嵇… III. ①微分几何-教材 IV. ①O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2021) 第 138120 号

责任编辑: 胡庆家 李 萍 / 责任校对: 彭珍珍
责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京鹿彩文化传播有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2021 年 7 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2022 年 6 月第三次印刷 印张: 8 1/4

字数: 165 000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

目 录

序

前言

第 1 章	曲线论的基本概念	1
1.1	正则参数化的曲线	1
1.2	弧长参数	1
1.3	Frenet 标架的运动方程、曲率和挠率	2
第 2 章	曲线论基本定理	8
2.1	两个例子	8
2.2	曲率、挠率与曲线形状	9
第 3 章	平面曲线的相对曲率	12
3.1	相对曲率	12
3.2	相对曲率与切向辐角	13
第 4 章	平面简单闭曲线	16
4.1	Hopf 旋转数定理	17
4.2	相对曲率的驻点	21
第 5 章	曲面论的基本概念	24
5.1	正则参数化的曲面	24
5.2	标架运动方程	25
5.3	曲面论的基本几何量	27
5.4	关于刚体运动的不变性	31
5.5	切向量场与参数变换	31
5.5.1	线性独立的向量场与参数变换	31

5.5.2 曲率线参数	33
5.6 Gauss 曲率与曲面形状	34
5.7 Gauss 曲率的内蕴表示	35
5.8 平均曲率公式	37
第 6 章 几类特殊曲面	39
6.1 函数的图	39
6.2 旋转曲面	40
6.3 直纹面	41
6.3.1 直纹面的 Gauss 曲率	41
6.3.2 可展曲面	42
6.3.3 没有脐点的可展曲面	43
6.4 全脐点曲面	44
6.5 常 Gauss 曲率曲面的例子	45
6.6 极小曲面	46
6.6.1 平均曲率与面积泛函	46
6.6.2 悬链面	47
6.6.3 极小图	48
6.7 管状曲面	49
第 7 章 曲面上的曲线	51
7.1 测地曲率和测地挠率	51
7.1.1 标架运动方程	51
7.1.2 正则参数化曲线的测地曲率和测地挠率	53
7.1.3 测地曲率、测地挠率与曲率、挠率的关系	54
7.2 协变导数与平行移动	55
7.2.1 协变导数	55
7.2.2 协变导数的基本性质	56
7.2.3 测地线	56

... 33	7.2.4 平行移动	57
... 34	7.3 局部 Gauss-Bonnet 公式	59
... 35	7.4 有孤立奇点的向量场	61
... 37	7.4.1 向量场在一点处的指标	61
... 39	7.4.2 指标的积分公式	63
... 39	第 8 章 两类特殊参数化	65
... 40	8.1 测地线方程组	65
... 41	8.2 一点规范化的参数变换	66
... 41	8.3 极坐标变换	67
... 42	8.4 共形参数化	69
... 43	8.4.1 共形参数变换	69
... 44	8.4.2 局部存在性	70
... 45	8.4.3 球极投影	71
... 46	第 9 章 曲面论基本定理	72
... 46	9.1 第一基本型、第二基本型的相容性条件	72
... 47	9.1.1 标架运动方程的相容性条件	72
... 48	9.1.2 Gauss 方程	73
... 49	9.1.3 Codazzi 方程	74
... 51	9.1.4 Gauss-Codazzi 方程的一个应用	75
... 51	9.2 曲面论基本定理的证明	76
... 51	第 10 章 极小曲面	81
... 53	10.1 极小图	81
... 54	10.1.1 可积条件	81
... 55	10.1.2 Levy 变换	82
... 55	10.1.3 极小曲面的局部共形参数化	83
... 56	10.1.4 Bernstein 定理	84
... 56	10.2 极小曲面与复分析	85

10.2.1	Weierstrass 数据	86
10.2.2	共形参数化曲面的 Weierstrass 数据	86
10.2.3	Weierstrass 数据的亚纯函数表示	87
10.2.4	Weierstrass 表示	88
第 11 章	曲面的整体描述	91
11.1	$\mathbb{R}^3$ 中的曲面	91
11.2	$\mathbb{R}^3$ 中的可定向曲面	92
11.3	共形坐标覆盖	94
11.4	曲面的几何量	95
11.5	球面刚性定理	96
11.6	整体 Gauss-Bonnet 公式	97
11.6.1	三角剖分与欧拉数	97
11.6.2	亏格与欧拉数	99
11.6.3	整体 Gauss-Bonnet 公式的证明	100
11.6.4	向量场的指标公式	102
11.7	亚纯微分	103
11.8	协变导数和指数映射	105
11.8.1	协变导数	105
11.8.2	测地线	105
第 12 章	内蕴距离与三角剖分	107
12.1	内蕴距离	107
12.2	最短测地线	108
12.3	强凸集	110
12.4	Radó 定理的微分几何证明	113
参考文献		116
索引		117

第 1 章 曲线论的基本概念

在本章中, 我们对正则参数化的曲线引入 Frenet 标架, 并通过 Frenet 标架的无穷小形变发现满足前言中基本条件 (1) 和 (2) 的几何量 (即曲线的曲率和挠率).

1.1 正则参数化的曲线

$\mathbb{R}^3$ 中一个正则参数化的曲线是指一个满足 $\frac{d\gamma}{dt} \neq 0 (t \in I)$ 的光滑映射 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, 其中 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间, 对 $\gamma = (x^1, x^2, x^3)^T$, 记

$$\frac{d\gamma}{dt} := \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right)^T.$$

我们称 $t \in I$ 为正则参数化曲线 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的参数. 设 $\sigma: J \rightarrow I$ 是一个光滑函数 ($J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间), 由定义可知

$$\gamma \circ \sigma: J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

是一个正则参数化的曲线当且仅当 $\sigma'(\tau) \neq 0$ 对任何 $\tau \in J$ 成立. 此时, 我们称 $\gamma \circ \sigma: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的一个参数变换.

1.2 弧长参数

$\mathbb{R}^3$ 中一个弧长参数化的曲线是指一个满足

$$\left| \frac{d\gamma}{ds} \right| = 1, \quad s \in I$$

的光滑映射 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, 并称 $s \in I$ 为 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的弧长参数.

对任何正则参数化的曲线 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, 取定 $t_0 \in I$, 令

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\gamma}{d\tau} \right| d\tau, \quad t \in I,$$

则 $s = \sigma(t)$ 为 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的弧长参数, 即 $\left| \frac{d}{ds} \gamma \circ \sigma^{-1} \right| \equiv 1$. 此外, 由定义可知, 正则参数化曲线的弧长参数在相差一个符号和平移的意义下唯一.

1.3 Frenet 标架的运动方程、曲率和挠率

由于对任何正则参数化的曲线总可取到弧长参数, 因此只要先对弧长参数化的曲线构造几何量, 再通过参数变换即可给出正则参数化曲线的几何量.

设 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是弧长参数化的曲线, 由 $\frac{d\gamma}{ds} \cdot \frac{d\gamma}{ds} = 1$ 可知

$$\frac{d\gamma}{ds} \cdot \frac{d^2\gamma}{ds^2} = 0, \quad s \in I,$$

即 $\frac{d\gamma}{ds}$ 与 $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ 处处正交. 因此, 在 $\frac{d^2\gamma}{ds^2} \neq 0$ 处可引入 $\mathbb{R}^3$ 的一组基

$$T(s) := \frac{d\gamma}{ds}, \quad N(s) := \frac{\frac{d^2\gamma}{ds^2}}{\left| \frac{d^2\gamma}{ds^2} \right|}, \quad B(s) := T(s) \times N(s).$$

从而

$$F(s) = [T(s), N(s), B(s)] \in SO(3), \quad s \in I.$$

由于 $F(s)^{-1} \cdot \frac{dF}{ds}(s)$ 是反对称 3×3 矩阵, 即存在 $\kappa, \tau, a \in C^\infty(I)$ 使得

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N + aB, \quad (1.1)$$

$$\frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B, \quad (1.2)$$

$$\frac{dB}{ds} = -aT - \tau N. \quad (1.3)$$

由 (1.1) 和 $\frac{dT}{ds} = \frac{d^2\gamma}{ds^2} = \left| \frac{d^2\gamma}{ds^2} \right| N$ 可得

$$\kappa = \left| \frac{d^2\gamma}{ds^2} \right|, \quad a = 0.$$

对等式 $\frac{dT}{ds} = \kappa N$ 两边微分可知, 当 $\kappa(s) \neq 0$ 时

$$\frac{dN}{ds} = \frac{1}{\kappa} \frac{d^2T}{ds^2} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \right) \frac{dT}{ds},$$

再由 (1.2) 可得

$$\begin{aligned} \tau &= B \cdot \frac{dN}{ds} = (T \times N) \cdot \frac{dN}{ds} \\ &= \left(T, N, \frac{dN}{ds} \right) \\ &= \left(T, \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds}, \frac{1}{\kappa} \frac{d^2T}{ds^2} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \right) \frac{dT}{ds} \right) \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \left(T, \frac{dT}{ds}, \frac{d^2T}{ds^2} \right). \end{aligned}$$

在 $\kappa(s) \neq 0$ 处可定义 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的挠率

$$\tau = \frac{1}{\kappa^2} \left(T, \frac{dT}{ds}, \frac{d^2T}{ds^2} \right).$$

由上面的讨论可知

$$\begin{cases} \frac{dT}{ds} = \kappa N, \\ \frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B, \\ \frac{dB}{ds} = -\tau N, \end{cases}$$

即

$$F^{-1} \frac{dF}{ds} = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

我们称 $\kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right|$ 为 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的曲率, $F = [T, N, B]$ 为 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的 Frenet 标架, 并称 (1.4) 为曲线 γ 的标架运动方程.

任取 $A \in SO(3)$, $a \in \mathbb{R}^3$ 和弧长参数化的曲线 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, 则由定义可知 $A\gamma + a: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 仍然是弧长参数化的曲线, 再由 (1.4) 可知 $A\gamma + a$ 和 γ 有相同曲率和挠率. 如上定义的曲率、挠率自动满足前言中的基本要求 (2).

我们先通过一个具体的例子来体会以上定义的几何量. 取三个实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2, a > 0$. 定义圆柱螺旋线 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为

$$\gamma(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{bs}{c} \right)^T, \quad s \in \mathbb{R}.$$

由定义可知 γ 是弧长参数化的曲线, γ 的 Frenet 标架 $[T, N, B]$ 由下面的式子给出

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{1}{c} \left(-a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right)^T, \\ N(s) &= - \left(\cos \frac{s}{c}, \sin \frac{s}{c}, 0 \right)^T, \\ B(s) &= \frac{1}{c} \left(b \sin \frac{s}{c}, -b \cos \frac{s}{c}, a \right)^T, \end{aligned}$$

γ 的曲率和挠率分别为

$$\kappa(s) = \frac{a}{c^2}, \quad \tau(s) = \frac{b}{c^2}.$$

在这个例子中, 曲率与圆柱螺旋线在 x^1x^2 -平面上的投影的弯曲程度有关, 挠率与圆柱螺旋线在 x^3 -轴方向的平移速度有关.