A CONCISE COURSE
IN DIFFERENTIAL GEOMETRY

微分几何简明教程

嵇庆春　编著

科学出版社

内 容 简 介

本书以较小的篇幅介绍微分几何的基本概念和经典结果，着重解释引入几何概念的动机以及从局部微分几何到整体微分几何的自然过渡. 除了强调微分几何的观点和方法之外，我们也注重介绍微分几何中的微分方程和复分析工具. 作为微分几何的应用，我们将在本书的最后一章用微分几何方法证明紧曲面三角剖分的存在性.

本书的读者对象为数学专业的本科生以及希望快速了解微分几何的基本观点和方法的相关领域科研人员，所需的基础知识包括：数学分析、高等代数和初步的微分方程、复分析、拓扑学.

图书在版编目(CIP)数据

微分几何简明教程/嵇庆春编著. —北京：科学出版社，2021.7
ISBN 978-7-03-069366-2

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①嵇… Ⅲ. ①微分几何–教材 Ⅳ. ①O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2021）第 138120 号

责任编辑：胡庆家 李 萍 / 责任校对：彭珍珍
责任印制：吴兆东 / 封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2021 年 7 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2022 年 6 月第三次印刷 印张：8 1/4
字数：165 000
定价：58.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　　录

第 1 章　曲线论的基本概念

在本章中，我们对正则参数化的曲线引入 Frenet 标架，并通过 Frenet 标架的无穷小形变发现满足前言中基本条件 (1) 和 (2) 的几何量 (即曲线的曲率和挠率).

1.1　正则参数化的曲线

$\mathbb{R}^3$ 中一个**正则参数化的曲线**是指一个满足 $\dfrac{d\gamma}{dt} \neq 0 (t \in I)$ 的光滑映射 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$，其中 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间，对 $\gamma = \left(x^1, x^2, x^3\right)^{\mathrm{T}}$，记

$$\frac{d\gamma}{dt} := \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right)^{\mathrm{T}}.$$

我们称 $t \in I$ 为正则参数化曲线 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ 的参数. 设 $\sigma : J \to I$ 是一个光滑函数 ($J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间)，由定义可知

$$\gamma \circ \sigma : J \to \mathbb{R}^3$$

是一个正则参数化的曲线当且仅当 $\sigma'(\tau) \neq 0$ 对任何 $\tau \in J$ 成立. 此时，我们称 $\gamma \circ \sigma : J \to \mathbb{R}^3$ 为 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ 的一个参数变换.

1.2　弧 长 参 数

$\mathbb{R}^3$ 中一个弧长参数化的曲线是指一个满足

$$\left|\frac{d\gamma}{ds}\right| = 1,\ s \in I$$

的光滑映射 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$，并称 $s \in I$ 为 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ 的弧长参数.

对任何正则参数化的曲线 $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$, 取定 $t_0 \in I$, 令

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\gamma}{d\tau}\right| d\tau, \quad t \in I,$$

则 $s = \sigma(t)$ 为 $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ 的弧长参数, 即 $\left|\frac{d}{ds}\gamma \circ \sigma^{-1}\right| \equiv 1$. 此外, 由定义可知, 正则参数化曲线的弧长参数在相差一个符号和平移的意义下唯一.

1.3　Frenet 标架的运动方程、曲率和挠率

由于对任何正则参数化的曲线总可取到弧长参数, 因此只要先对弧长参数化的曲线构造几何量, 再通过参数变换即可给出正则参数化曲线的几何量.

设 $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ 是弧长参数化的曲线, 由 $\frac{d\gamma}{ds} \cdot \frac{d\gamma}{ds} = 1$ 可知

$$\frac{d\gamma}{ds} \cdot \frac{d^2\gamma}{ds^2} = 0, \quad s \in I,$$

即 $\frac{d\gamma}{ds}$ 与 $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ 处处正交. 因此, 在 $\frac{d^2\gamma}{ds^2} \neq 0$ 处可引入 $\mathbb{R}^3$ 的一组基

$$T(s) := \frac{d\gamma}{ds}, \quad N(s) := \frac{\frac{d^2\gamma}{ds^2}}{\left|\frac{d^2\gamma}{ds^2}\right|}, \quad B(s) := T(s) \times N(s).$$

从而

$$F(s) = [T(s), N(s), B(s)] \in SO(3), \quad s \in I.$$

由于 $F(s)^{-1} \cdot \frac{dF}{ds}(s)$ 是反对称 3×3 矩阵, 即存在 $\kappa, \tau, a \in C^\infty(I)$ 使得

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N + aB, \tag{1.1}$$

$$\frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B, \tag{1.2}$$

$$\frac{dB}{ds} = -aT - \tau N. \tag{1.3}$$

由 (1.1) 和 $\dfrac{dT}{ds} = \dfrac{d^2\gamma}{ds^2} = \left|\dfrac{d^2\gamma}{ds^2}\right| N$ 可得

$$\kappa = \left|\frac{d^2\gamma}{ds^2}\right|, \quad a = 0.$$

对等式 $\dfrac{dT}{ds} = \kappa N$ 两边微分可知, 当 $\kappa(s) \neq 0$ 时

$$\frac{dN}{ds} = \frac{1}{\kappa}\frac{d^2T}{ds^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\frac{dT}{ds},$$

再由 (1.2) 可得

$$\begin{aligned}
\tau &= B \cdot \frac{dN}{ds} = (T \times N) \cdot \frac{dN}{ds} \\
&= \left(T, N, \frac{dN}{ds}\right) \\
&= \left(T, \frac{1}{\kappa}\frac{dT}{ds}, \frac{1}{\kappa}\frac{d^2T}{ds^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\frac{dT}{ds}\right) \\
&= \frac{1}{\kappa^2}\left(T, \frac{dT}{ds}, \frac{d^2T}{ds^2}\right).
\end{aligned}$$

在 $\kappa(s) \neq 0$ 处可定义 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ 的**挠率**

$$\tau = \frac{1}{\kappa^2}\left(T, \frac{dT}{ds}, \frac{d^2T}{ds^2}\right).$$

由上面的讨论可知

$$\begin{cases}
\dfrac{dT}{ds} = \kappa N, \\[2mm]
\dfrac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B, \\[2mm]
\dfrac{dB}{ds} = -\tau N,
\end{cases}$$

即

$$F^{-1}\frac{dF}{ds} = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

我们称 $\kappa = \left|\frac{dT}{ds}\right|$ 为 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ 的**曲率**, $F = [T, N, B]$ 为 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ 的 **Frenet 标架**, 并称 (1.4) 为曲线 γ 的**标架运动方程**.

任取 $A \in SO(3), a \in \mathbb{R}^3$ 和弧长参数化的曲线 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, 则由定义可知 $A\gamma + a : I \to \mathbb{R}^3$ 仍然是弧长参数化的曲线, 再由 (1.4) 可知 $A\gamma + a$ 和 γ 有相同曲率和挠率. 如上定义的曲率、挠率自动满足前言中的基本要求 (2).

我们先通过一个具体的例子来体会以上定义的几何量. 取三个实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2, a > 0$. 定义圆柱螺旋线$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 为

$$\gamma(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right)^{\mathrm{T}}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

由定义可知 γ 是弧长参数化的曲线, γ 的 Frenet 标架 $[T, N, B]$ 由下面的式子给出

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{1}{c}\left(-a\sin\frac{s}{c}, a\cos\frac{s}{c}, b\right)^{\mathrm{T}}, \\ N(s) &= -\left(\cos\frac{s}{c}, \sin\frac{s}{c}, 0\right)^{\mathrm{T}}, \\ B(s) &= \frac{1}{c}\left(b\sin\frac{s}{c}, -b\cos\frac{s}{c}, a\right)^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

γ 的曲率和挠率分别为

$$\kappa(s) = \frac{a}{c^2}, \quad \tau(s) = \frac{b}{c^2}.$$

在这个例子中, 曲率与圆柱螺旋线在 x^1x^2-平面上的投影的弯曲程度有关, 挠率与圆柱螺旋线在 x^3-轴方向的平移速度有关.