

基础学科拔尖学生培养计划配套教材
—— 数学专业系列

数学分析

(上册)

复旦大学数学科学学院

楼红卫 编著

中国教育出版传媒集团
高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 上册 / 楼红卫编著. -- 北京: 高等教育出版社, 2022.8

ISBN 978-7-04-058873-6

I. ①数… II. ①楼… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第106040号

SHUXUE FENXI

项目策划 李蕊 兰莹莹
策划编辑 高旭
责任编辑 高旭
封面设计 王凌波
版式设计 王凌波
责任绘图 邓超
责任校对 高歌
责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>

印 刷 三河市春园印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 23.25
字 数 400千字
版 次 2022年8月第1版
印 次 2022年8月第1次印刷
定 价 53.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,
请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究
物料号 58873-00

目录

绪论 1

第一章 实数 5

§1 集合与映射7

集合, 关系与映射, Descartes 乘积, 函数, 集合的势, 可数集, 不可数集, 代数数, 超越数, Bernstein 定理

§2 第一次数学危机22

第一次数学危机, 可公度量, 比例论

§3 实数公理系统25

自然数公理, 数学归纳法, 实数公理系统, 实数系, 有序域的性质, 三角不等式, Newton 二项展开式, 杨辉三角, 广义实数系, 区间, 单调函数, 复数域, 周期函数

§4 实数系的构造34

实数系的构造, Dedekind 分割, 稠密性, 上确界存在定理, 有理数, 无理数, 实数的十进制表示, n 次方根, 算术几何平均不等式, 指数函数的定义, 对数函数的定义

§5 附录47

构造实数系的其他典型方法, 实数系的唯一性, 序同构, 实数系构造的 Cantor 方法

第二章 序列极限 55

§1 数列极限57

数列极限, 无穷级数, 无穷乘积, 数列极限的性质, 夹逼准则

§2 无穷大量, 无穷小量, Stolz 公式	68
无穷大量, 无穷小量, 小 o , 大 O , 等价, 同阶, 不定型, Stolz—Cesáro 定理	
§3 Euclid 空间中的基本概念	76
线性空间, 赋范线性空间, 度量空间, Euclid 距离, 平行四边形法则, 范数, 内点, 邻域, 外点, 边界点, 聚点, 开集, 闭集, 闭包, 稠密, 无处稠密集/疏朗集, 内积空间	
§4 Euclid 空间中的基本定理	85
确界存在定理, 单调收敛定理, 自然对数, 常数 e , 闭区间套定理, 聚点原则, 致密性定理, 基本列, Cauchy 准则, 调和级数, 有限覆盖定理, Loewner 偏序, 对角线法, 闭集套定理, 局部, 紧集, 完备性, 列紧集, 相对紧集, 准紧集, Euler 常数, Lebesgue 数, Lebesgue 覆盖定理	
§5 上、下极限	103
上极限, 下极限, Stolz 公式的推广	
§6 正项级数	110
正项级数, 正项级数收敛的基本定理, 比较判别法, Cauchy 判别法, D'Alembert 判别法, Raabe 判别法, 收敛得更慢与发散得更慢的级数	
§7 任意项级数	119
任意项级数, 绝对收敛, 条件收敛, Abel 变换, Abel 判别法, Dirichlet 判别法, 交错级数, Leibniz 判别法, 幂级数, 幂级数的收敛半径, Cauchy—Hadamard 公式, Cauchy 乘积, Mertens 定理, 级数的重排, 累级数, 无穷乘积的收敛性	

第三章 函数极限与连续 131

§1 函数极限	133
函数极限, 单侧极限, 函数极限的基本性质, Heine 定理, 基本定理的对应结果, 重要数列极限的对应结果, 关于	
极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	

§2 连续函数143

连续函数, 左连续, 右连续, 连续函数的四则运算, 复合函数的连续性, 基本初等函数的连续性, 反函数的连续性, 紧集上逆映射的连续性, 间断点, 一些重要的极限, e^x 的无穷级数表示

§3 连续函数的基本性质152

道路, 连通集, 区域, 拓扑学视角下的连续性, 相对开集, 相对闭集, 介值定理, 最值定理, 连续函数的有界性, 一致连续性, $\mathbb{R}^n$ 中范数的等价性, 代数基本定理, 不动点, 压缩映射原理, 摄动法, 利用极限定义指数函数和对数函数

§4 方向极限与累次极限164

曲线, 方向极限, 沿曲线的极限, 累次极限, 多重极限

第四章 导数与微分 169

§1 导数与微分171

导数的几何物理背景, 一元向量值函数的导数, 左导数, 右导数, 导数与单调性, 方向导数与偏导数, 全导数, 微分, 线性变换/线性算子, 微商, 梯度, 导数的四则运算

§2 反函数、复合函数和隐函数的导数182

一元实函数反函数的可导性及求导公式, 复合函数的导数, 链式法则, 一阶微分形式的不变性, 隐函数求导, 基本初等函数的导数, 对数求导法

§3 高阶导数191

高阶导数, Leibniz 公式, 微分算子 D , C^k , $C^{k,\alpha}$ 函数类, 光滑函数, Hölder 条件, Lipschitz 条件, 多重指标, 多重零点

§4 复指数函数、正弦函数和余弦函数199

用级数定义复指数函数, 用微分方程定义正弦和余弦函数, Euler 公式

第五章 不定积分 207

- §1 不定积分 209
原函数, 不定积分, 恰当方程
- §2 变量代换法 214
第一类变量代换, 第二类变量代换, 万能代换
- §3 分部积分法 220
- §4 有理函数不定积分 224
有理函数, 最简分式
- §5 求解简单的常微分方程 230
常微分方程, 特解, 通解, 分离变量法, 初值问题, 解的最大存在区间, 一阶线性方程, 常数变易法, 积分因子法, 全微分方程, 齐次方程, Bernoulli 方程

第六章 微分中值定理和 Taylor 展开式 237

- §1 微分中值定理 239
Fermat 引理, Rolle 中值定理, Lagrange 中值定理, Cauchy 中值定理, 微分 Darboux 定理, 凸集, 常微分方程初值问题解的唯一性
- §2 L'Hôpital 法则 249
L'Hôpital 法则及其推广, 极限计算中的化简——“去核”与“去皮”
- §3 凸函数 258
凸(凹)函数, Jensen 不等式, 割线斜率与凸性, 凸性与连续性, 中点凸(凹)函数, 凸性与一阶导数, 支撑线(面), 凸性与二阶导数, Hesse 矩阵, 对偶数, Young 不等式, 离散 Hölder 不等式, 离散 Minkowski 不等式, 幂平均不等式, 调和平均
- §4 微分 Darboux 定理与比较定理 276
微分不等式, 常微分方程比较定理, 偏微分方程比较定理

§5 Taylor 多项式与插值多项式 283

Taylor 多项式, 带 Peano 型余项的 Taylor 公式, Maclaurin 展开式, Taylor 展开式的唯一性, 带 Lagrange 型余项的 Taylor 公式, Lagrange 型插值多项式, 线性方程组解的线性可加性, Runge 现象, 插值多项式的误差估计, 插值多项式, 插值函数, 函数拟合, 广义中值定理

§6 Taylor 展开式的计算及应用 303

Taylor 展开式计算的直接方法和间接方法, 利用 Taylor 展开式计算反函数的高阶导数, 利用 Taylor 展开式计算隐函数的高阶导数, Landau 不等式, Taylor 展开式在组合问题上的应用

第七章 微分问题 317

§1 隐函数存在定理 319

隐函数存在定理, 曲面的切平面, 法向量

§2 极值问题 326

强制条件, 极值问题, 无条件极值, 一阶必要条件, 驻点, 二阶必要条件, 最小二乘法, 线性拟合, 条件极值, Lagrange 乘子法, 矩阵的诱导范数

§3 常系数线性微分方程 336

一阶常系数线性微分方程组, 矩阵指数函数, 高阶常系数线性微分方程, 特征方程, 算子法

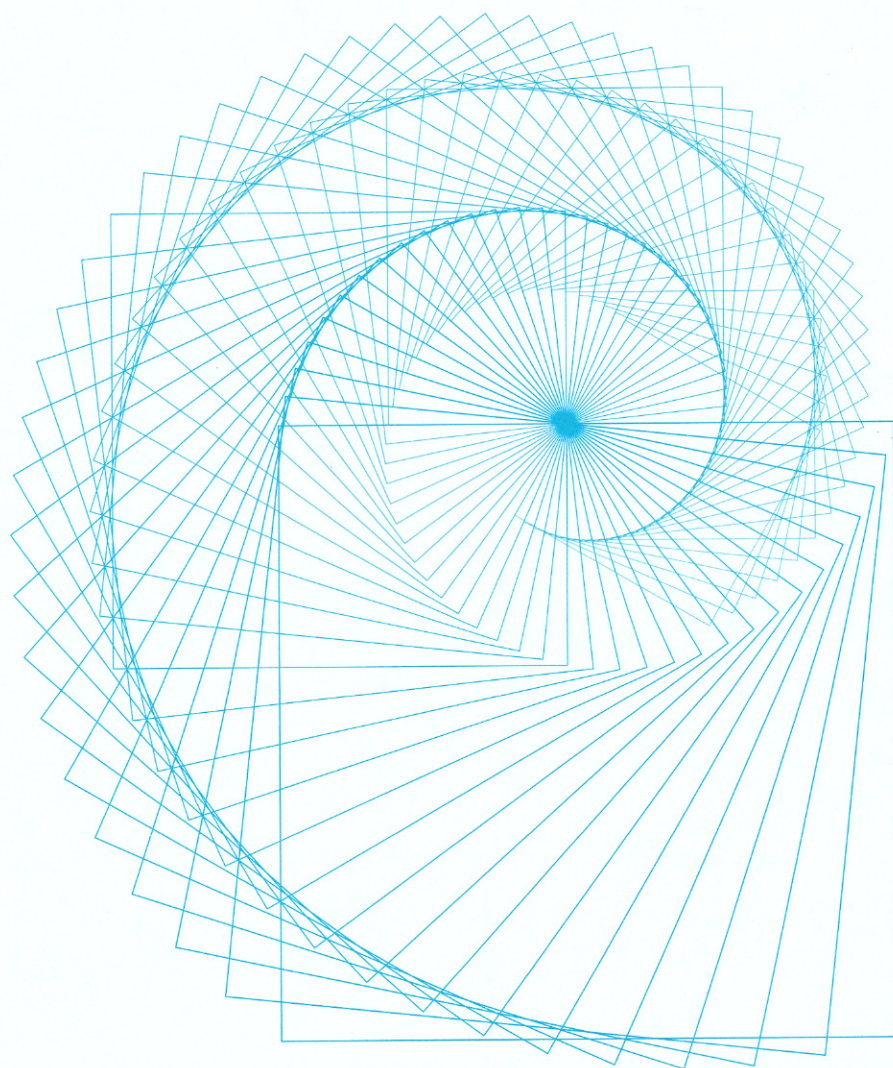
§4 导数的其他应用 347

Newton 切线法, 平方收敛, 平面曲线的曲率与曲率半径, 一元实函数的草图, 拐点

参考文献 353

索引 353

第一章 实数



§1 集合与映射

集合, 关系与映射, Descartes 乘积, 函数, 集合的势, 可数集, 不可数集, 代数数, 超越数, Bernstein 定理

§2 第一次数学危机

第一次数学危机, 可公度量, 比例论

§3 实数公理系统

自然数公理, 数学归纳法, 实数公理系统, 实数系, 有序域的性质, 三角不等式, Newton 二项展开式, 杨辉三角, 广义实数系, 区间, 单调函数, 复数域, 周期函数

§4 实数系的构造

实数系的构造, Dedekind 分割, 稠密性, 上确界存在定理, 有理数, 无理数, 实数的十进制表示, n 次方根, 算术几何平均不等式, 指数函数的定义, 对数函数的定义

§5 附录

构造实数系的其他典型方法, 实数系的唯一性, 序同构, 实数系构造的 Cantor 方法

实数理论是数学分析的直接基础. 而集合论是建立实数理论的必要工具. 不仅如此, 集合论是整个现代数学大厦的基础, 学习数学, 有必要从集合论出发. 但正因为集合论的基础性, 它的建立涉及一些深刻的思想, 需要用很大的篇幅专门论述. 因此, 本章只对集合概念作一个简单的介绍.

与集合一样, 实数及其基本性质是我们非常熟悉的. 但是, 回顾一下就会发现, 我们在中学阶段学到的实数的很多性质, 包括什么是无理数, 仅仅是建立在直觉之上的. 从现在开始, 我们将从有理数出发, 建立实数理论.

§1 集合与映射

定义一个概念需要用到比它更基本的概念, 那么总有一个概念是最基本的, 集合就是这样一个概念, 我们只能描述它, 而不能定义它.

集合

集合 (简称**集**) 是指一些具有特定性质的对象的总体, 这些对象称为集合的元素. 集合论创始人 Cantor¹ (康托尔) 对集合的刻画为² “吾人直观或思维之对象, 如为相异而确定之物, 其总括之全体即为集合, 其组成集合之物谓之集合之元素.”

通常用大写字母 A, B, C 等表示集合, 而用小写字母 a, b, c 等表示元素.

需要指出, 一方面, 一个元素 a 是不是集合 A 的元素是确定的, 另一方面, 集合是由它的所有元素确定的. 换言之, 若两个集合的元素完全相同, 则它们相等.

1 Cantor, G F L P, 1845—1918 年.

2 参见文献 [24]: 肖文灿《集合论初步》.