概率论

（第二版）

应坚刚　何　萍　编著

博学·数学系列

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

概率论/应坚刚,何萍编著. —2 版. —上海:复旦大学出版社,2016. 9
(复旦博学·数学系列)
ISBN 978-7-309-12461-3

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①应…②何… Ⅲ. 概率论-高等学校-教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 176214 号

概率论(第二版)
应坚刚 何 萍 编著
责任编辑/范仁梅 陆俊杰

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
常熟市华顺印刷有限公司

开本 787×960 1/16 印张 13.25 字数 226 千
2016 年 9 月第 2 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-12461-3/O·602
定价:27.00 元

目　录

第一章　初等概率论

概率论的发展是从古典概率开始的, 理解概率论当然也要从古典概率开始. 古典概率是指我们熟知的那些掷硬币, 掷骰子, 摸球等游戏中产生的概率问题, 在如今的中学教材中也已经出现, 日常生活中更是常见. 它通常具有有限多种可能性且直观上是等概率这样两个特点. 古典概率的问题通常归结于集合计数问题, 我们学习的重点不是怎么解决这些问题, 而是怎么通过这些问题来理解概率论的产生.

§1.1　概率简史

概率论是数学的一个分支, 产生于人们对随机现象的认识与研究. 人类对随机现象的认识和利用应该已经有悠久的历史, 在许多场合都会用到随机现象, 比如赌博, 祭祀等. 特别是赌博, 深植于各种阶层各个民族的文化之中, 正是因为人类无法破解这些随机现象, 赌博作为一种娱乐或者可以让人瞬间贫富转换的战场才始终长盛不衰. 观察概率论的历史, 我们可能还需要感谢一些职业赌徒的执着地想勘破玄机的精神，de Méré 就是记录在案的一个法国贵族赌徒, 他不断地写信给当时最伟大的数学家 Pascal 询问他自己在赌博中迷惑的问题, 比如著名的分奖金问题等, 正是他的这些问题让数学家开始认真思考随机现象中的一些规律性现象, 从而诞生出概率论这个学科.

尽管历史记录认为概率论始于 Pascal 和 Fermat 的通信讨论, 但我相信对随机现象的兴趣与研究一定远早于这个年代, 因为无法想象会没有智者对瞬间暴富的秘法产生兴趣, 由于没有记录, 这些研究湮灭在历史的长河里. 从 Pascal 和 Fermat 那个时间算起, 到 Kolmogorov 的公理体系出现之前, 尽管概率不是严格意义上的数学, 但仍然产生了丰富的结果, 如组成本教材主要内容的大数定律与中心极限定理等, 还有超出本教材范围的随机游动理论, Markov 过程, Lévy 过程, Brown 运动等. 到 20 世纪 30 年代由前苏联伟大的数学家 Kolmogorov 引入了严格的公理体系, 概率论立刻带着丰富的内容进入数学家族, 成为数学的一个重要分支, 直至今天.

本讲义把概率论作为严格的数学理论来介绍, 强调其严密的一面, 但观察概率论的历史, 读者应该认识到概率论的背景和应用是学习概率论所不可缺少的.

像前言中所说那样: 理论是可以通过教材学的, 直观却是需要自己体验的. 作为数学的一个分支, 如著名概率学者 Feller [5](p.1) 所言: [1] *要注意区分理论的三个方面, 第一是其形式逻辑公理体系, 第二是其直观背景历史演变, 第三是其应用, 对任何一方面的缺失, 都会妨碍你对整个理论的欣赏.*

A. Einstein 有句备受争议的名言: 上帝不掷骰子. 意思就是说大自然早已确定了所有的规则. 但不论上帝掷不掷骰子, 他至少有时候表现得像在掷骰子, 因为现实世界里确实有许多难以预知结果的现象. 人们称这些现象为随机现象. 概率论是由于人们对随机现象的兴趣发展起来的, 也是研究随机现象的重要工具之一, 但概率论不关心随机现象的成因, 也就是说不研究随机现象是由于自然本身确实不可预知抑或是由于人类的无知. 简单的如掷硬币, 它本质上是一个经典的确定的力学系统, 但现有的测量手段和计算工具远不足以告诉硬币的哪一面会向上, 所以我们一样把它称为随机现象. 概率这个词是人们经常使用的, 用来描述一个随机现象中某个事件出现的可能性大小, 但也许很少有人会仔细地想一想人们在使用这个词的时候的确切意义. 例如, 大多数人都知道掷硬币得到国徽的概率是 $\frac{1}{2}$, 但它的含义究竟是什么呢? 又例如, 若天气预报说明天下雨的概率是 $\frac{1}{2}$, 它的含义又是什么? 是否和硬币的情况一样呢? 其实这两种场合是不同的, 在前一种场合下, 可以说这样的说法是有依据的, 而在后一种场合, 人们只是用概率表达自己的一种信念. 说前一种情况有依据, 是因为我们可以用一种简单的方法进行验证, 例如我们可以任意次地重复地掷硬币, 看其中正面或反面出现的比例, $\frac{1}{2}$ 的意义在于当掷足够多次硬币后, 这个比例大约会是 $\frac{1}{2}$. 而在后一种情况, 概率只是表达说话人语气的一种方式, 不能验证其正确或不正确. 数学中的概率论是以前一种情况为研究对象的. 关于这方面类似问题的解释, 更多地属于哲学范畴, 感兴趣的读者可参考 von Mises 的经典著作 [12].

在 Kolmogorov 把概率作为测度引入了公理体系之后, 概率论成为数学的一个部分, 它很好地表达了绝大多数已知的经典概率问题, 就如同几何学可以表达实际测绘中的问题一样. 严格的理论来自于人们对于直觉的抽象化, 它可以帮助我们触摸到直觉难以触及的深度. 在这里, 我们对概率论的早期历史作一简单说

[1]原文: In each field we must carefully distinguish three aspects of the theory: (a) the formal logical content, (b) the intuitive background, (c) the application. The character, and the charm, of the whole structure cannot be appreciated without considering all three aspects in their proper relation.

明.

(1) 1654年: B. Pascal(1623–1662) 与 P. Fermat(1601-1655) 的 1654 年夏天的一些通信. 在其中, 他们对一些所谓的机会问题进行了探讨, Fermat 建议了古典概率的算法, 而 Pascal 想讨论赌博中的公正问题.

(2) 1657年: Huygens(1629–1695) 出版的书: *On Calculations in Games of Chance*.

(3) 1713年: J. Bernoulli(1654–1705) 出版的书: *The Art of Guessing*, 证明了大数定律.

(4) 1730年: De Moivre(1667–1754) 的工作: The Analytic Method, 证明了中心极限定理.

(5) 1812年: Laplace(1749–1827) 出版的书: *Essai philosophique sur les probabilités*.

(6) 1933年: Kolmogorov 出版的书: *Foundations of Probability Theory*, 概率的公理化推出, 并被大家接受.

还有许多著名学者在概率的早期研究中留下了他们的名字: 如 Poisson(1781–1840), Gauss(1777–1855), Chebyshev (1821–1894), Markov (1856–1922), von Mises (1883–1953), Borel (1871–1956) 等. 然后随着整个数学基础的成熟, 概率也成为一个重要的数学领域.

§1.2 计数

本节简单介绍集合计数的问题, 也就是组合理论, 它是古典概率模型中的主要工具. 最重要的是下面的乘法原理.

定理 1.2.1 设完成一件事情分 r 个顺序的步骤, 第一步有 n_1 种选择, 固定第一步的选择后, 第二步有 n_2 种选择, 固定前两步的选择后, 第三步有 n_3 种选择, $\cdots$, 在固定前 $r-1$ 步的选择后, 第 r 步有 n_r 种选择, 那么完成这件事情共有 $n_1 n_2 \cdots n_r$ 种选择.

从 n 个学生中选 r 个学生排成队列是典型的例子, 这时第一步有 n 种选择, 第一个人选定后, 第二个人有 $n-1$ 种选择, $\cdots$, 由乘法原理共有

$$n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

种排列的方法, 记此数为 $(n)_r$, 称为 n 个对象中选 r 个的排列数. 如果 $n=r$, 这等于说 n 个学生有多少种不同的顺序, 共有 $n!$ 种. 这里注意选择数是指固定前面步骤中的选择后的选择数, 单独地看第二步, 它和第一步一样有可能选择到所有的人, 因此也有 n 种选择, 但选好了第一个, 第二步就只有 $n-1$ 个选择了. 这是不可重复的情形, 在其他一些情形下选择也许是可以重复的, 比如选号码, 设 r 个人都从 $1,2,\cdots,n$ 中选个号码, 因为可以重复, 每个人都有 n 种选择, 我们讲选择是独立的, 这时共有 n^r 种不同选择.

将上面 n 个对象取 r 个排列分成为如下两步: 先取出 r 个对象, 然后再将它们排顺序. 第一步的不同选择数称为是 n 个对象中取 r 个的组合数, 记为 $\binom{n}{r}$ 或 C_n^r, 与排列数的不同处是它不计顺序, 第二步是 r 个对象的排列有 $r!$ 这么多选择. 再用乘法原理得

$$(n)_r = \binom{n}{r}\cdot r!,$$

因此

$$\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}.$$

组合数也被理解为 n 个不同元素的组分为包含 r 个与 $n-r$ 个元素的两个组的分组数. 排列和组合的差别通常也就是考虑顺序和不考虑顺序的差别.

例 1.2.1 掷一个骰子, 有 6 种可能; 两个骰子, 有 36 种可能. 若区别骰子, 两个骰子点数不同有 $6\times5=30$ 种可能, 三个骰子点数互相不同有 $6\times5\times4=120$ 种可能. 若不区别骰子, $2,1,3$ 与 $1,2,3$ 就不区分了, 这时两个骰子点数不同有 $6\times5/2!=15$ 种可能, 三个骰子点数互相不同有 $6\times5\times4/3!=20$ 种可能. 从标准的 52 张扑克牌中取5张牌, 当然通常是不在意牌的顺序的, 共有 $\binom{52}{5}$ 种选择. 其中没有重复的牌点的可能选择共有 $\binom{13}{5}\cdot4^5$ 种, 恰有一个对子的可能选择有 $13\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{12}{3}\cdot4^3$ 种, 恰有两个对子的可能选择有 $\binom{13}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot11\cdot4$ 种. 恰是三带二(即3张相同数字的加2张相同数字的, 英文是 full house) 的可能选择有 $13\cdot4\cdot12\cdot\binom{4}{2}$ 种. ∎