黎曼几何初步(H)讲义

丁 青

2022 年 10 月 17 日

目　录

第一章　Riemann 度量

§1.1　引言

从历史上来讲，Riemann 几何是 $\mathbb{R}^3$ 中曲面论的自然推广，熟知，$\mathbb{R}^3$ 中的曲面论是由 Gauss 于1827年建立起来的，其中 Gauss 定义了曲面的曲率— 后称之为 Gauss 曲率，它依赖于曲面的第一基本形式和第二基本形式，Gauss 的伟大贡献在于揭示 Gauss 曲率仅与第一基本形式有关，这是 Riemann 几何的出发点，以及发现曲面上的测地三角形的内角和与 π 要相差 Gauss 曲率 K 在该测地三角形区域D 上的积分：

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \iint_D K d\sigma.$$

这些发现涵盖着重大的推论，并与欧几里德的第五平行公理密切相关，然而由于没有足够的数学工具（关键是微分流形的概念），Gauss 没有公开发表他的这一发现，实际上非欧几何的出现应该是由 Lobachevski (1829) 和 Bolyai (1831) 独立完成的。

尽管没有足够的微分流形的概念，Riemann 在1854年再次运用 Gauss 的思想，引入今天我们称之为 n 维微分流形的东西，并在每一点处指定一个基本二次型（第一基本形式），然后把 Gauss 曲率发展到该情形— 截面曲率。从阅读 Riemann 的文献可知，他的动机来自于一个基本问题— 发展非欧几何理论，了解物理与几何的关系。

Riemann 1854年在哥廷根大学提交讲师就职演说的论文《论几何学的假设》，除了哲学阐述之外，全文只有一个数学公式：

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2}{\left(1 + \frac{K}{4}\left((x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2\right)\right)^2},$$

其中 K 为常数，他断言 ds^2 的曲率等于 K。当 $K = 0$ 时，这是 $\mathbb{R}^n$ 上标准的度量；当 $K > 0$ 时，这是 $\mathbb{S}^n$ 在球极投影下的标准度量；当 $K < 0$ 时，这就是伪球面（双曲）度量了。

然而直到1913年，由于 H. Weyl 的工作，适用于 Riemann 几何发展的微分流形的定义才精确地提出。由于缺乏工具，早期 Riemann 几何的发展是缓慢的，重要的刺激一是源于1916 年广义相对论的需要，二是由于1917年 Levi-Civita 平行移动

的引入。我们的目标不是完整地介绍 Riemann 几何，而是追踪其原始轨迹和提供跟踪的原动力。

我们将从引入度量开始，以后的部分中，微分流形总是假定是一个 Hausdorff 空间并具有可数基（从而保证在 M 上有单位分解!）；光滑或可微总是指是 C^∞ 的，n-维流形 M 的维数有时也会隐去不提。

§1.2 Rieamnn 度量

2.1 定义 微分流形 M 上的一个 Riemann 度量（或者称为 Riemann 结构）是一个指定（correspondence），它在 M 的每一点 p 处指定其切空间 T_pM 上的一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$（一个对称、双线性及正定的二次形式），并且以下述意义光滑变化，如果 $x:U\subset\mathbb{R}^n\to M$ 是 p 点附近的局部坐标系，且 $x(x^1,\cdots,x^n)=q\in x(U)$ 及 $\frac{\partial}{\partial x^i}(q)=dx_q(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$，则 $\langle\frac{\partial}{\partial x^i}(q),\frac{\partial}{\partial x^j}(q)\rangle=g_{ij}(x^1,\cdots,x^n)$ 是 U 上的光滑函数。

显然，$(g_{ij}(x))$ 是一个 $n\times n$ 的对称正定矩阵— 视为 $x(U)$ 上或 M 上的 $(0,2)$ 型对称（正定）张量。由微分流形的 C^∞ 性质，这一定义中的光滑性不依赖于坐标的选取，对于任何一对向量场 $X,Y\in\chi(M)$，则 $\langle X,Y\rangle$ 是光滑的。在不至于混淆的情况下，我们会去掉内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ 的下标 p，(g_{ij}) 是 Riemann 度量的局部表示形式。

具有给定 Riemann 度量的微分流形称之为 Riemann 流形；在进一步讨论之前，我们首先要搞清楚两个 Riemann 流形何时是一致的。

2.2 定义 设 M,N 是两个 Riemann 流形，微分同胚 $f:M\to N$（即 f 是带有可微逆的微分双射）称为是一个等距（isometric），如果

$$\langle u,v\rangle_p=\langle df_p(u),df_p(v)\rangle_{f(p)},\quad \forall p\in M,\ \forall u,v\in T_pM. \tag{1.1}$$

2.3 定义 设 M,N 是两个 Riemann 流形，可微映照 $f:M\to N$ 称为在 p 点处是局部等距的，如果存在 p 的一个邻域 $U\subset M$ 使得 $f:U\to f(U)$ 是微分同胚且满足 (1.1)。

通常我们说 M 局部等距于 N ，如果对于每一点 p 存在 p 在 M 中的一个邻域 $U\subset M$ 及一个局部等距 $f:U\to f(U)$。

两个Riemann 流形 M, N 称之为一致的，如果存在一个整体的微分同胚的等距映照 $f: M \to N$；两个局部等距的 Riemann 流形未必是整体等距的。

下面是 Riemann 流形概念下的一些重要的非平凡的例子。

2.4 例子 最平凡的例子是 $M = \mathbb{R}^n$，并把 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $(0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ 等同，度量给定为 $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$。这样的 $\mathbb{R}^n$ 称为 n 维欧氏空间，这样空间上的 Riemann 几何就是欧氏几何。

2.5 例子 浸入流形　设 $f: M^n \to N^{n+k}$ 是浸入，即 f 是可微的且 $df_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ 对于一切 $p \in M$ 是单射。如果 N 具有 Riemann 结构（即一个给定的 Riemann 度量），那么 f 能够诱导 M 上的如下的一个 Riemann 结构：

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad \forall p \in M,\ \forall u, v \in T_pM.$$

（因 f 是单射，$\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ 是正定的（否则有非平凡的零空间，与单射矛盾），定义2.1的其余部分（即光滑性）容易验证）M 上的这个度量称之为由 f 所诱导的度量，这是称 f 为等距浸入。

一个重要的情形是对于一个可微映照 $h: M^{n_k} \to N^k$ 并且 $q \in N$ 是 h 的正则（regular）值时（即 $dh_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ 对于所有的 $p \in h^{-1}(q)$ 是满射），我们知道 $h^{-1}(q) \subset M$ 是 M 的维数为 n 的子流形，因此我们能通过 inclusion 得到 $h^{-1}(q)$ 上的 Riemann 度量。

例如，设 $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 由 $h(x^1, \cdots, x^n) = \sum_{i=1}^n (x^i)^2 - 1$ 给出，则 $0 \in \mathbb{R}$ 是 h 的正则值且 $h^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = 1\} = \mathbb{S}^{n-1}(1)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面，$\mathbb{R}^n$ 所诱导的 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的度量称为其典则（canonical）度量。

2.6 例子 Lie 群　具有微分结构的一个 Lie 群 G 是使得映照 $(x, y) \to xy^{-1}$, $\forall x, y \in G$ 是可微的。由此得到左平移 L_x 和右平移 R_x 是 G 的微分同胚，其中 $L_x(y) = xy, \forall y \in G$; $R_x(y) = yx$。G 上的一个 Riemann 度量称之为左不变的，如果 $\langle u, v \rangle_y = \langle (d(L_x))_y u, (d(L_x)_y v \rangle_{L_x(y)}$ 对于一切 $x, y \in G$ 成立，其中 $u, v \in T_yG$，即 L_x 是一个等距映照；类似地有右不变的 Riemann 度量。G 上的一个 Riemann 度量既是左不变的又是右不变的，称之为双不变的（bi-invariant）。同样我们可以定义 G 上的左不变的向量场 X，左不变向量场的全体与 G 的 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 等同，详细

的细节我们不再讨论。在紧致的 Lie 群上总存在双不变的 Riemann 度量，至少对于半单的 Lie 群是这样。

2.7 例子 乘积度量 设 M_1, M_2 是两个 Riemann 流形，我们考虑笛卡尔乘积 $M_1 \times M_2$，令 $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i,\ i = 1, 2$ 是自然投影，并如下在 $M_1 \times M_2$ 上引入一个 Riemann 度量：

$$\langle u, v\rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v)\rangle_p + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v)\rangle_q,\ (p, q) \in M_1 \times M_2, u, v \in T_{(p,q)} M_1 \times M_2.$$

容易验证这是乘积流形是的 Riemann 度量。例如环 $S^1 \times \cdots \times S^1 = T^n$ 有一个乘积的 Riemann 度量，其中 $S^‘$ 是平面上的圆周，带有从欧氏平面上所诱导的度量，带有这一乘积度量的 T^n 称之为平坦环面。

我们要面临怎样由一个 Riemann 度量来计算曲线的长度。

2.8 定义 可微映照 $c : I \to M$ 是从 $\mathbb{R}$ 上的一个区间 $I \subset \mathbb{R}$ 到微分流形 M 的一个映照，称之为（M 上的）曲线或者参数化的曲线。

注意到，一条参数化的曲线可以自交并且也可以有尖角。

2.9 定义 沿一条曲线 $c : I \to M$ 的向量场 V 是一个映照，它把 $t \in I$ 映到一个向量 $V(t) \in T_{c(t)}M$。我们说 $V(t)$ 是可微的，是指对于 M 上每个可微的函数 f，函数 $t \to V(t)f$ 在 I 上可微。

向量场 $dc\left(\frac{d}{dt}\right)$ 表示为 $\frac{dc}{dt}$，称之为 c 的速度训练场或者切向量场，注意到沿曲线 c 的一个向量场未必可以延拓到 M 的一个开集之上。把曲线 c 限制在区间 $[a, b] \subset I$ 上称之为线段，如 M 是 Riemann 流形，我们定义线段的长度为

$$l(c) = l_a^b(c) = \int_a^b \langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt}\rangle^{\frac{1}{2}} dt.$$

现在我们来证明微分流形上 Riemann 度量的存在性定理。

2.10 命题 任何微分流形（Hausdorff + 可数（拓扑）基）上总存在（一个）Riemann 度量。

证明 设 $\{f_\alpha\}$ 是 M 上从属于 M 的一个坐标邻域开覆盖 $\{V_\alpha\}$ 的（可微）单位分解，这意味着 $\{V_\alpha\}$ 是局部有限的（即 M 的任何一点有一个邻域 U 使得 $U \cap V_\alpha \neq \emptyset$ 至多只有有限多个 α 成立）并且 $\{f_\alpha\}$ 是 M 上的函数满足：

1）$f_\alpha \geq 0$，$f_\alpha = 0$ 在闭集 $\overline{V}_\alpha$ 的余集上成立；

2）$\sum_\alpha f_\alpha(p)=1$ 对于一切 $p\in M$ 成立。

显然我们能够在每个坐标邻域 V_α 上确定一个 Riemann 度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle^\alpha$，如由局部坐标系所产生的欧氏度量，那么我们令

$$\langle u,v\rangle_p=\sum_\alpha f_\alpha\langle u,v\rangle^\alpha,\quad \forall p\in M,\ u,v\in T_pM.$$

可直接验证这样所构造的确实是 M 上的一个 Riemann 度量（即验证对称性，双线性性和正定性）。 证毕

在结束本章之前，我们来表明如何由一个 Riemann 度量来给出可定向流形 M 上体积的概念。如通常那样，我们需要一点预备事实。设 $p\in M$，$x:U\subset\mathbb{R}^n\to M$ 是 p 附近的一个参数化的坐标系，并且也是正定向的参数化。考虑 T_pM 的正定向的单位正交基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，并记 $X_i(p)=\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$，在基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 下表示为 $X_i(p)=\sum_{i,j}a_{ij}e_j$，那么

$$g_{ik}(p)=\langle X_i,X_k\rangle(p)=\sum_{j,l}a_{ij}a_{kl}\langle e_j,e_l\rangle=\sum_j a_{ij}a_{kj}.$$

由于由向量 $X_1(p),\cdots,X_n(p)$ 在 T_pM 中张成的平行多面体的体积 $Vol(X_1(p),\cdots,X_n(p))$ 等于 $Vol(e_1,\cdots,e_n)=1$ 乘上矩阵 (a_{ij}) 的行列式，我们得到

$$Vol(X_1(p),\cdots,X_n(p))=\det(a_{ij})=\sqrt{\det(g_{ij}(p))}.$$

如果 $y:V\subset\mathbb{R}^n\to M$ 是 p 的另一个参数化坐标系，且 $Y_i(p)=\frac{\partial}{\partial y^i}(p)$ 及 $h_{ik}(p)=\langle Y_i,Y_k\rangle(p)$，我们有

$$\begin{aligned}\sqrt{\det(g_{ij}(p))}&=Vol(X_1(p),\cdots,X_n(p))=JVol(Y_1(p),\cdots,_n(p))\\&=J\sqrt{\det(h_{ij}(p))},\end{aligned}\tag{1.2}$$

其中 $J=\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)$ 是坐标变换的 Jacobi 矩阵的行列式。

现在对于 M 中的区域 $R\subset M$（开的连通子集），且其闭包是紧致的。我们不妨假定 R 包含在一个坐标邻域之中，这里 $x:U\subset\mathbb{R}^n\to M$ 是正定向的坐标系且 $x^{-1}(U)$ 的边界在 $\mathbb{R}^n$ 中是零测集（注意 $\mathbb{R}^n$ 中零测集在微分同胚下不变）我们把 R 的体积定义为

$$Vol(R)=\int_{x^{-1}(R)}\sqrt{\det(g_{ij}(p))}dx^1\cdots dx^n.\tag{1.3}$$

我们断言 (1.3) 是 well defined，事实上，如 R 包含在另一个正定向的坐标系 $y: V \subset \mathbb{R}^n \to M$ 之中，我们由多重积分的变换公式得到

$$\int_{x^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij}(p))} dx^1 \cdots dx^n = \int_{y^{-1}(R)} \sqrt{\det(h_{ij}(p))} dy^1 \cdots dy^n = Vol(R),$$

表明 (1.3) 的定义不依赖于坐标的选取。

2.11 注解 熟知微分形式的读者会注意到方程 (1.2) 蕴含着 (1.3) 中的表达式是一个正的 degree 为 n 的微分形式 $\sqrt{\det(g_{ij}(p))} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$，我们称之为 M 的体积元 dv，为了定义一个不落在一个坐标邻域的紧致区域 R 的体积，有必要考虑从属于 R 的有限覆盖的坐标邻域 $x(U_i)$ 的单位分解 $\{\varphi_i\}$，并取

$$Vol(R) = \sum_i \int_{x^{-1}(R)} \varphi_i dv.$$

可以直接验证该定义不依赖于坐标和单位分解的选取。

2.12 注解 显然一个整体定义的 degree 为 n 的正的微分形式的存在性导致流形“体积”的概念，Riemann 度量只是其中可选的一种方式，它得到体积的概念。