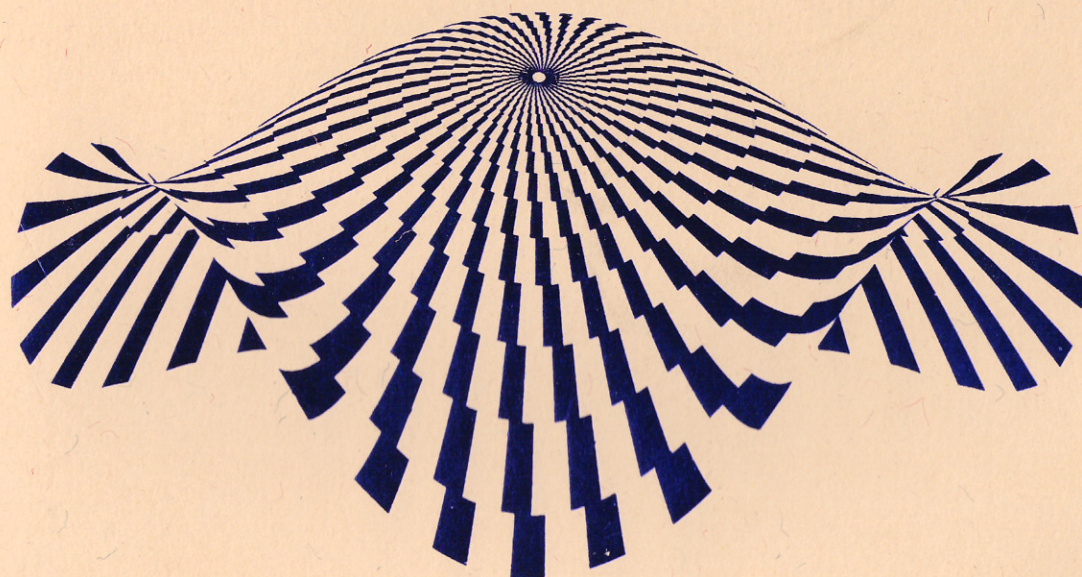


微分几何 (修订版)

Differential Geometry

苏步青 胡和生 沈纯理

潘养廉 张国樑



高等教育出版社

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581999 58582371
58582488//反盗版举报传真：(010) 82086060//反盗版
举报邮箱：dd@hep.com.cn//通信地址：北京市西城区
德外大街4号 高等教育出版社法务部//邮政编码：
100120

图书在版编目(CIP)数据

微分几何 / 苏步青等编. -- 2版(修订版)
. -- 北京：高等教育出版社，2016.11 (2017.12重印)
ISBN 978-7-04-044722-4

I. ①微… II. ①苏… III. ①微分几何—
高等学校—教材 IV. ①O186.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第020704号

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
印刷 北京鑫丰华彩印有限公司
开本 787mm×1092mm 1/16

印张 14.75
字数 240千字
版次 1979年6月第1版
2016年11月第2版
印次 2017年12月第2次印刷
定价 26.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，
请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究
[物料号 44722-00]

微分几何

Differential Geometry

(修订版)

策划编辑 田玲
责任编辑 田玲
书籍设计 张申申
插图绘制 尹文军
责任校对 刘莉
责任印制 尤静

第一章 三维欧氏空间的曲线论

- §1 曲线 曲线的切向量 弧长1
- §2 主法向量与从法向量
曲率与挠率5
- §3 Frenet 标架 Frenet 公式10
- §4 曲线在一点邻近的性质13
- §5 曲线论基本定理17
- §6 平面曲线的一些整体性质23
 - 6.1 关于闭曲线的一些概念23
 - 6.2 切线的旋转指标定理25
 - *6.3 凸曲线32
 - *6.4 等周不等式33
 - *6.5 四顶点定理35
 - *6.6 Cauchy-Crofton 公式37
- §7 空间曲线的整体性质42
 - *7.1 球面的 Crofton 公式42
 - *7.2 Fenchel 定理44
 - *7.3 Fary-Milnor 定理45

第二章 三维欧氏空间中曲面的局部几何性质

- § 1 曲面的表示 切向量 法向量 49
 - 1.1 曲面的定义 49
 - 1.2 切向量 切平面 50
 - 1.3 法向量 52
 - 1.4 曲面的参数变换 53
 - 1.5 例 54
 - 1.6 单参数曲面族 平面族的包络面 可展曲面 59
- § 2 曲面的第一、第二基本形式 64
 - 2.1 曲面的第一基本形式 64
 - 2.2 曲面的正交参数曲线网 68
 - 2.3 等距对应 曲面的内蕴几何学 70
 - 2.4 共形对应 71
 - 2.5 曲面的第二基本形式 77
- § 3 曲面上的活动标架 曲面的基本公式 80
 - 3.1 省略和式记号的约定 80
 - 3.2 曲面上的活动标架 曲面的基本公式 81
 - 3.3 Weingarten 变换 W 85
 - 3.4 曲面的共轭方向 渐近方向 渐近曲线 86
- § 4 曲面上的曲率 88
 - 4.1 曲面上曲线的法曲率 88
 - 4.2 主方向 主曲率 90
 - 4.3 Dupin 标线 91
 - 4.4 曲率线 92
 - 4.5 主曲率及曲率线的计算 总曲率 平均曲率 94
 - 4.6 曲率线网 99

- 4.7 曲面在一点邻近处的形状 100
- 4.8 Gauss 映射及第三基本形式 102
- 4.9 总曲率、平均曲率满足某些性质的曲面 105
- § 5 曲面的基本方程及曲面论的基本定理 110
 - 5.1 曲面的基本方程 110
 - 5.2 曲面论的基本定理 114
- § 6 测地曲率 测地线 120
 - 6.1 测地曲率向量 测地曲率 120
 - 6.2 计算测地曲率的 Liouville 公式 121
 - 6.3 测地线 124
 - 6.4 法坐标系 测地极坐标系 测地坐标系 128
 - 6.5 应用 134
 - 6.6 测地挠率 139
 - 6.7 Gauss-Bonnet 公式 141
- § 7 曲面上向量的平行移动 144
 - 7.1 向量沿曲面上一条曲线的平行移动 绝对微分 144
 - 7.2 绝对微分的运算 性质 147
 - 7.3 自平行曲线 147
 - 7.4 向量绕闭曲线一周的平行移动 总曲率的另一种表示 148
 - 7.5 沿曲面上曲线的平行移动与欧氏平面中平行移动的关系 150

第三章 曲面的整体性质初步

- § 1 曲面的整体表述 152
- § 2 曲面上的 Gauss-Bonnet 公式 159
- § 3 向量场 165
- § 4 球面的刚性 173
- * § 5 极小曲面 176
- * § 6 完备曲面 Hopf-Rinow 定理 182
- * § 7 微分流形 黎曼流形 188

附录 1 向量函数及其运算 199

- § 1 向量代数 199
- § 2 向量函数 极限 200
- § 3 向量函数的微分 201
- § 4 向量函数的积分 202

附录 2 欧氏空间的点集拓扑 203

- § 1 n 维欧氏空间 开集 闭集 203
- § 2 连续映射 205
- § 3 连通集 206
- § 4 紧致集 208
- § 5 拓扑空间 210
 - 5.1 拓扑空间的定义 210
 - 5.2 拓扑空间中的闭集 212
 - 5.3 拓扑结构的等价性 212
 - 5.4 第二可列基公理 212
 - 5.5 Hausdorff 空间 213
 - 5.6 连续映射 同胚映射 213
 - 5.7 向量空间的拓扑 213

附录 3 微分几何的发展简史 214

索引 217

第一章

三维欧氏空间的
曲线论

§1 曲线 曲线的切向量 弧长

物理学中,曲线常被看作质点运动的轨迹,时间 t 是描述质点运动的参数.在微分几何中,也常常采用参数方程来表示曲线.

设 $\{O;xyz\}$ 是 E^3 中的笛卡儿直角坐标系,

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \quad (1-1)$$

都是 t 的连续可微函数(今后我们总假定它们有三阶连续导数),设这些函数的定义域是直线 $\mathbf{R}^1$ 中的一个区间 (a,b) (区间的端点 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$), (1-1) 式给出了从 (a,b) 到 E^3 中的一个连续可微映射

$$t \longrightarrow (x(t), y(t), z(t))$$

在这个映射下, t 被映到点 $P(x(t), y(t), z(t))$, (a,b) 的像集就构成了 E^3 中的一条连续可微曲线 C , 简称曲线(见图1). 我们把 t 称为曲线 C 的参数. (1-1) 式就是曲线 C 的参数方程. 今后常把 (1-1) 式写成向量形式

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(x(t), y(t), z(t)) \quad (1-2)$$

而把曲线上参数为 t 的点 P 称为点 $\mathbf{r}(t)$, 简称为 t 点或 $P(t)$ 点.

按照参数增加的方向可以确定出曲线的正向(见图1). 称向量

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right)$$

为曲线在 t 处的切向量. 如果在 $t=t_0$ 处 $\frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt} \neq \mathbf{0}$, 则称参数为 t_0 的点是曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的正则点, 否则就称为奇点. 曲线 C 上所有点都是正则点时, 则称 C 为正则曲线.

例1 曲线 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$ 的轨迹是柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上间距为 $2\pi b$ 的一条圆柱螺线(见图2), 它是一条正则曲线.

例2 曲线 $\mathbf{r}(t)=(t^3, t^2, 0)$, $t \in E^1$, 在 $t=0$ 处,

$$\frac{d\mathbf{r}(0)}{dt} = (0, 0, 0)$$

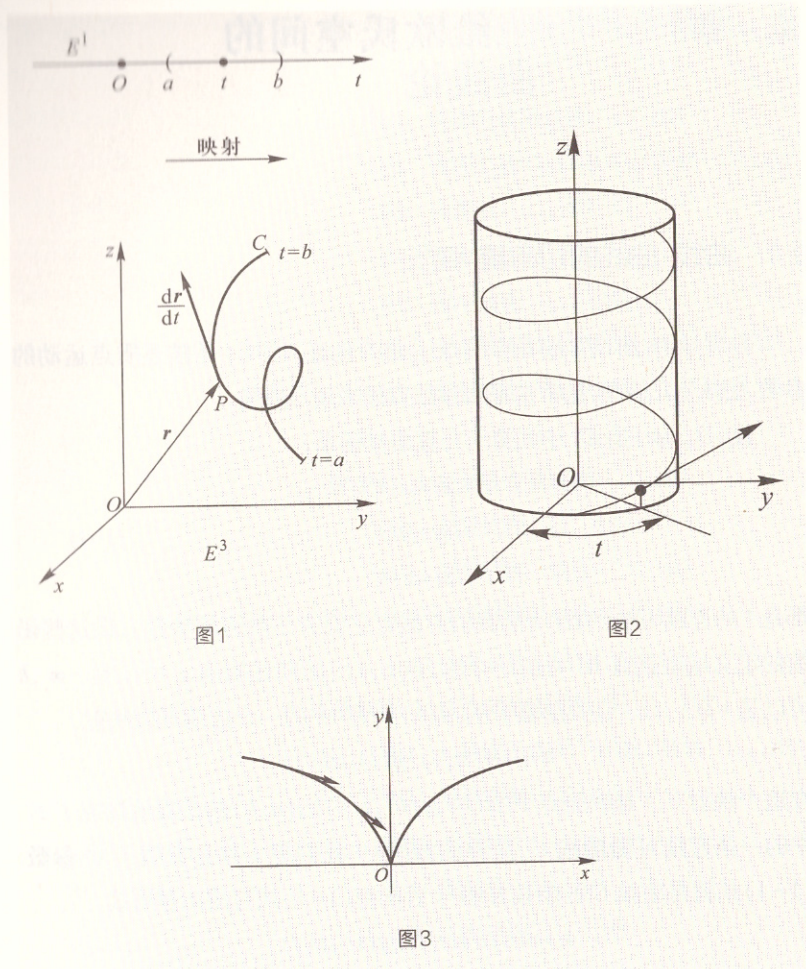


图1

图2

图3

所以 $t=0$ 点不是正则点(见图3).

如果采用另一个参数 $\bar{t}$, 则曲线 C 的方程为 $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$. 为了保证 t 和 $\bar{t}$ 一一对应, 参数变换式 $\bar{t} = \bar{t}(t)$ 必须满足

$$\frac{d\bar{t}}{dt} \neq 0$$

为了使 $t, \bar{t}$ 的增加方向都相应于曲线的正向, 则要求

$$\frac{d\bar{t}}{dt} > 0 \quad (1-3)$$

于是由 $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{dt}$ 知道, 曲线 C 上一点如在取参数 t 时为正则点, 则在取参数 $\bar{t}$ 时也必为正则点.

对于正则曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, 称

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| dt \quad (1-4)$$

为曲线从参数 t_0 到 t 处的弧长, 其中

$$\left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| = \sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt} \right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt} \right]^2 + \left[\frac{dz(t)}{dt} \right]^2}$$

是切向量 $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ 的长度.

设曲线 C 上两点 P_0, P 在曲线的不同参数 $t, \bar{t}$ 的选取下, P_0 点的参数分别为 $t_0, \bar{t}_0$, 点 P 的参数分别为 $t, \bar{t}$. 令 $s(t)$ 是曲线从 t_0 到 t 的弧长, $\bar{s}(\bar{t})$

为曲线从 $\bar{t}_0$ 到 $\bar{t}$ 的弧长. 设在参数变换下, $\frac{dt}{d\bar{t}} > 0$, 则有

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}} \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\bar{t}} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} \right| \cdot \left| \frac{dt}{d\bar{t}} \right| d\bar{t} \\ &= \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}} \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\bar{t}} \right| d\bar{t} = \bar{s}(\bar{t}) \end{aligned}$$

因此弧长只依赖于曲线上的点 P_0, P , 而与参数的选取无关.

显然, 弧长 s 是 t 的可微函数, 且

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| \quad (1-5)$$

对正则曲线, $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \neq \mathbf{0}$, 所以 $\frac{ds}{dt} > 0$, 于是可取弧长 s 作为新的参数. 这时由

$$1 = \frac{ds}{ds} = \left| \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \right|$$

知道, 以弧长为参数时曲线的切向量 $\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}$ 为单位向量. 反之, 当切向量为

单位向量时 $\left(\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = 1 \right)$, 从 (1-4) 式积出

$$s = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$$

当式中 t_0 取 0 时, 可看出 t 就是从 $t=0$ 处起算的弧长 (见图 4).

今后如无特别说明, 曲线总是指正则曲线, 而且 $\mathbf{r}(s)$ 中的 s 为弧长参

数,并用“撇”表示关于 s 的导数,如

$$\mathbf{r}'(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{r}''(s) = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$$

等等.

下面我们证明一个定理.

定理 设曲线 $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ (s 是弧长参数) 的每点有一个单位向量 $\mathbf{a}(s)$ (见图 5(a)), 则有

$$|\mathbf{a}'(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right|$$

其中 $\Delta \theta$ 表示 $\mathbf{a}(s + \Delta s)$ 与 $\mathbf{a}(s)$ 的夹角 (见图 5(b)).

证明

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}'(s)| &= \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(s + \Delta s) - \mathbf{a}(s)}{\Delta s} \right| \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{a}(s + \Delta s) - \mathbf{a}(s)|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{2 \sin \frac{\Delta \theta}{2}}{\Delta s} \right| \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\left| \frac{\sin \frac{\Delta \theta}{2}}{\frac{\Delta \theta}{2}} \right| \cdot \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right| \right) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right| \end{aligned}$$

定理证毕.

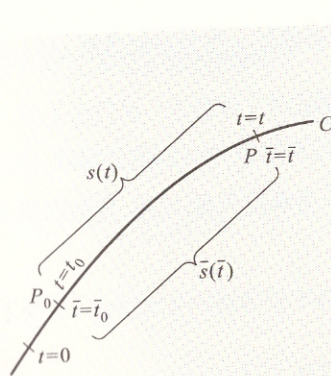


图4

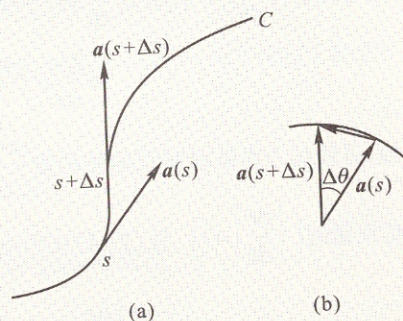


图5